Laparra, M., & Margolinas, C. (2009). Le schéma: un écrit de savoir? *Pratiques, 143-144*(Numéro spécial: les écrits de savoir), 51-82

LE SCHÉMA : UN ÉCRIT DE SAVOIR ?

Marceline Laparra, Université Paul Verlaine de Metz, CELTED EA 3474

Claire Margolinas, Clermont Université, Université Blaise Pascal, PAEDI EA 4281

1. Introduction

Dans cet article, nous nous intéressons au schéma, dans le cadre de la résolution de problèmes arithmétiques au début de l'école primaire (classe de C.P.). Ainsi, notre propos se situe à la fois dans le cadre d'une réflexion sur le schéma comme écrit de savoir, mais aussi dans le cadre d'une réflexion sur la résolution des problèmes arithmétiques.

Les « écrits de savoir » auxquels nous allons nous intéresser ici présentent une double caractéristique :

- Ils ne donnent pas à lire un discours sur le monde, mais ils donnent à voir une activité réflexive sur des objets du monde, et au travers d'eux sur des relations entre des nombres, puisqu'il s'agit de schémas représentant la résolution d'un problème mathématique.
- Ils ont été produits et sont utilisés par de jeunes élèves qui ne sont ni des lecteurs ni des scripteurs confirmés, puisqu'ils sont au C.P.

1.1 Le schéma dans le cadre des mathématiques

Pour le lecteur qui n'est pas nécessairement familier de la didactique des mathématiques, il convient tout d'abord de montrer que la question du schéma, même si elle n'est pas ignorée dans ce champ de recherche, n'y occupe néanmoins pas une place centrale.

Dans le cadre de la didactique des mathématiques, la représentation est considérée comme un élément constitutif de la connaissance (Balacheff & Margolinas, 2005; Duval, 1995; Vergnaud, 1990b). Par ailleurs, l'attention aux ostensifs (Chevallard & Bosch, 1999) met l'accent sur l'importance des signes, notamment graphiques, dans l'enseignement des mathématiques. De son côté, Guy Brousseau considère de plus que les situations d'action sont insuffisantes pour constituer un processus d'enseignement des mathématiques, il insiste sur la nécessité d'une articulation de situations qui, partant de l'action, se développement en situations de formulation et situations de preuve, ce qui permet de fonder un processus d'institutionnalisation (Brousseau, 1998). Alors que l'importance de la mise en situation et plus généralement des situations d'action, qui coincide avec l'injonction ancienne de « l'activité » de l'élève a été entendue par la profession enseignante, les situations de formulation, au contraire, restent souvent inexistantes (Margolinas, 2003).

Néanmoins, malgré l'importance que la théorie accorde aux représentations et aux formulations, dans le cadre de la résolution de problèmes arithmétiques, les travaux de recherche qui concernent spécifiquement le schéma et son intervention dans le processus de compréhension et de résolution de problèmes sont assez peu nombreux, malgré le travail pionnier de Bessot & Richard (1980).

Par ailleurs, il existe des travaux qui concernent la « résolution de problème » (terme employé par la profession enseignante et les programmes), qui sont plus proches de la formation que de la recherche (comme en témoignent les lieux de publication de ces travaux : revue *Grand N* destinée aux professeurs des écoles et aux formateurs d'enseignants, actes du colloque de la COPIRELEM, colloque annuel consacré aux mathématiques dans la formation des enseignants du primaire).

Parmi ces travaux, nous retenons notamment ceux de Julo (1995, 2001) et de Monnier, (2003), qui s'intéresse à l'aide à la résolution de problème et font une place à la question du schéma. Par ailleurs, les résultats d'observation ou d'expérience (Bautier et al., 2004 ; Pfaff, 2003) semblent montrer une faible efficacité de l'introduction par le maître de schémas , en particulier pour les élèves faibles. C'est donc en partant de ce constat que notre travail prend son sens.

1.2. Cadre de l'observation

1.2.1 Une recherche sur les différenciations dans les apprentissages

Notre recherche a été menée dans le Réseau RESEIDA[1], dans ce cadre, nous nous intéressons particulièrement aux enjeux de savoir qui sont insuffisamment pris en compte par l'institution scolaire (Laparra & Margolinas, 2008; Margolinas & Laparra, 2008, 2009) pour permettre aux professeurs d'enseigner à tous les élèves les connaissances qui leur sont nécessaires.

[1] REcherches sur la Socialisation, l'Enseignement, les Inégalités et les Différenciations dans les Apprentissages, dirigé par Jean-Yves Rochex et Elisabeth Bautier, Université de Paris 8.

Cet article s'appuie sur deux séances observées en classe de C.P. Les deux séances ont été filmées et intégralement retranscrites, enregistrement et transcription qui font partie d'un vaste corpus constitué pour permettre l'observation systématique de neuf élèves appartenant à cette classe durant leur scolarisation en G.S.M. et au C.P. Pour ce faire, 60 heures de vidéo (moitié en G.S.M., moitié au C.P.) ont été réalisées et retranscrites. Il s'agit de séances soit de mathématiques, soit de lecture-écriture.

Les deux classes ainsi observées sont situées en zone d'éducation prioritaire dans une petite ville à forte tradition ouvrière du Puy-de-Dôme. Les élèves présentent une très grande homogénéité socio-culturelle : ils appartiennent quasiment tous à des milieux populaires, défavorisés au plan économique.

Au C.P., la classe est le plus souvent divisée, pour les activités considérées, en groupes de niveau. Le recours à ce dispositif pédagogique n'est pas né d'une demande des chercheurs observateurs mais d'une décision de l'équipe pédagogique, qui utilise ainsi des moyens supplémentaires qui lui sont attribués au titre de la Z.E.P.

1.2.2 Les deux séances observées

Le maître observé ici (au troisième trimestre 2005) intervient en appui dans cette classe en complément de l'enseignement dispensé par le titulaire de la classe, notamment en mathématiques. Dans le cas présent il prend en charge trois groupes, une matinée par semaine, en « résolution de problèmes » ou en « géométrie », en parallèle avec la maîtresse titulaire qui fait alors de la « production d'écrits » et une assistante d'éducation qui fait de « l'expression corporelle »[2]. Il enseigne également dans une autre école en C.P.

Être ainsi en charge de la « résolution de problèmes » n'est pas chose banale, ce champ n'intervenant pas comme un domaine spécifique dans les I.O. (celles de 2002 sont en vigueur au moment de l'observation), bien que la résolution de problème soit considérée, en mathématiques (y compris dans les I.O. actuelles) comme étant centrale. La réflexion que le maître a développée pour lui permettre de programmer son enseignement sur cette demi-journée hebdomadaire présente ainsi un caractère d'exception.

C'est sans doute pour cela que, après une première séance consacrée à la résolution d'un problème arithmétique tout à fait classique (dont l'énoncé sera donné plus loin), il décide de consacrer une deuxième séance toute entière au travail sur des schémas, dans un but clairement méthodologique. Notre article est appuyé sur l'analyse de celle-ci.

---

[2] Nous utilisons ici les termes employés par l'équipe pédagogique.

Ainsi notre observation, même si elle a lieu en classe « ordinaire » n'est pas banale. Elle nous donne l'occasion de comprendre les difficultés insurmontables auxquelles se confrontent inévitablement l'enseignant qui, sans autre viatique que les connaissances communes de la profession, introduit le schéma comme un outil méthodologique pour la résolution de problème.

1.2.3. Le problème étudié

Le problème traité durant les deux séances est le suivant :

> « Une boîte contient 12 cubes.
> On peut avoir des cubes bleus ou rouges.
> Il y a 5 cubes rouges. Combien y-a-t-il de cubes bleus ? »

L'énoncé présente de façon statique un problème parties/tout[3]. Au niveau du C.P., trois procédures de résolution de ce type de problème sont possibles, chacune d'entre elles pouvant s'appuyer ou non sur une représentation graphique :

- surcomptage (de 6 à 12), suivi du dénombrement de l'ensemble surcompté. On peut procéder à ce surcomptage en s'aidant de la collection intermédiaire que sont les doigts de la main, ou le faire en représentant graphiquement les éléments surcomptés jusqu'à 12.
- décomptage (de 5 à partir de 12). Comme pour la première procédure, on peut le réaliser à l'aide des doigts ou à l'aide d'une représentation graphique (on trace 12 éléments, on en barre 5, on dénombre le reste…).
- utilisation de résultats opératoires mémorisés : par exemple la plupart des élèves savent que 5 + 5 = 10, il suffit dès lors d'ajouter 2 à 5 pour obtenir 5 + 7 = 12. On peut là encore le faire en s'aidant ou non d'une représentation graphique des éléments en jeu ou de l'écriture algébrique correspondante.

Toutes ces stratégies ont été utilisées soit par le maître soit par des élèves dans les trois groupes lors de la première séance, de façon plus ou moins aboutie et dans des proportions variables selon les groupes. La troisième n'est pas évoquée par le maître, elle a peut-être été utilisée de manière implicite par ceux des élèves qui fournissent le résultat immédiatement. Lors de la deuxième séance elles seront à nouveau sollicitées à plusieurs reprises, successivement ou concurremment.

Durant les deux séances les erreurs suivantes, prévisibles en C.P., sont apparues de manière persistante dans tous les groupes :

[3] Selon la classification des problèmes additifs de Vergnaud (1990a).

- non prise en compte du tout (réponse : « 5 cubes rouges et *5 cubes bleus* »).
- non prise en compte de la partie (réponse : « *12 cubes bleus* »).
- non prise en compte de la relation parties/tout (réponse : « *17 cubes bleus* »).

La bonne réponse est exposée à plusieurs reprises par le maître et certains élèves dans les trois groupes au cours des deux séances.

Durant la deuxième séance, quinze jours après, le maître, après un bref rappel de la leçon précédente, a présenté des schémas réalisés par des élèves d'un autre C.P., dont il a également la charge pour ce type d'activité qui, confrontés au même problème que celui travaillé dans la première séance, ont été invités à « dessiner pour résoudre le problème plus facilement » (voir les schémas en annexe 1). Au cours de cette séance, il montre aux élèves la photocopie de 8 schémas réalisés par ces élèves d'une autre école ; il en sélectionne alors quelques-uns - pas les mêmes et pas dans le même ordre dans chacun des groupes[4] - et il entreprend alors de s'appuyer sur les schémas considérés pour revenir sur les procédures de résolution du problème posé.

Rien dans les I.O. du cycle 2 en vigueur au moment de l'observation n'invite le maître à user spécifiquement du schéma dans la résolution d'un problème mathématique[5]. S'il le fait, c'est de sa propre initiative, sans doute pour fournir aux élèves une aide méthodologique (« pour s'aider, on peut dessiner » comme il l'indique dans la première séance, à l'attention du groupe des « moyens ») et pour instaurer une situation permettant aux élèves de verbaliser des procédures mises en jeu lors de la résolution du problème, ce à quoi l'invitent au contraire les I.O. dans toutes les disciplines. Ce faisant, il donne à voir à l'observateur que les schémas, quand ils sont utilisés au cycle 2, le sont comme de simples outils ne nécessitant aucun apprentissage préalable.

1.3. Eléments de problématique

La leçon, que nous observons est exceptionnelle à plus d'un titre :

- elle a pour centre des schémas réalisés par d'autres élèves au sujet d'un problème arithmétique ;
- elle se décline trois fois, avec le même maître, dans des petits groupes différents.

[4] Groupe des « faibles » : 1 - Léa, 2 - Julie, 3 - Nur.
Groupe des « forts » : 1 - Léa, 2 - Audrey, 3 - Floriane, 4 - Hamdi, 5 - Damien, 6 - Seyla.
Groupe des « moyens » : 1 - Léa, 2 - Hamdi, 3 - Audrey, 4 - Seyla.

[5] Les I.O. en question sont celles de 2002 (B.O. 14 février 2002). Les I.O. en vigueur actuellement (B.O. 19 juin 2008) n'en parlent pas davantage.

Ce n'est pas ici ce qui est exceptionnel qui nous intéresse mais, bien au contraire, ce qui découle de déterminations et de contraintes qui dépassent à la fois la personne singulière du maître et la situation particulière mise en place par l'équipe pédagogique (groupes de niveaux). Comme nous nous appuyons néanmoins sur notre corpus (qui représente une centaine de pages de transcription pour cette leçon), nous dirons « le maître » pour désigner la personne qui, de fait, agit dans la situation, et pourtant, il ne s'agit en rien d'une étude qui s'intéresse à cette personne-là, mais bien au contraire, d'une étude qui cherche à comprendre les raisons (qui seraient les mêmes pour tous les maîtres dans les mêmes conditions) qui poussent à la fois ce maître-là et ces élèves-là à agir comme ils le font.

Notre raisonnement cherchera ainsi à convaincre le lecteur que les faits qui sont ainsi relatés ne sont en rien singuliers et qu'ils découlent de déterminants qui s'imposent à tous. La précision de l'étude de cas (Passeron & Revel, 2005) permettant ici de rendre compte du caractère général de celui-ci.

Nous commencerons pas étudier ce que sont les schémas pour le maître, au travers de ce qu'il en transparaît dans son discours et ses actions en situations (partie 2), puis ce qu'en font les élèves (partie 3) pour nous intéresser ensuite aux problèmes que pose, dans la classe, l'interprétation des schémas (partie 4). Nous examinerons alors les raisons pour lesquelles le schéma n'est pas pensé comme un objet d'apprentissage (partie 5) pour nous engager ensuite dans des propositions permettant d'envisager un enseignement des schémas à l'école primaire (partie 6). Nous conclurons sur la difficulté à didactiser le schéma (partie 7).

2. Ce que sont les schémas pour le maître

2.1 Les schémas comme simple trace d'un « faire »

Dans les trois groupes, l'enseignant tout au long de son questionnement ou de ses manipulations (cubes déposés ou pris dans une boîte) manifeste que les schémas qu'il montre aux élèves ne sont qu'une simple trace d'une activité, en quelque sorte le dépôt sur le papier d'un « faire » antérieur. Cette conception de ce qu'est un schéma pour lui apparaît de manière plus ou moins directe :

2.1.1 Ce qu'il en dit

Pour initier ou relancer l'observation par les élèves d'un schéma, il leur demande à maintes reprises ce qu'ont *fait* les auteurs des schémas :

> « M : alors ce qui est intéressant c'est que dans une autre / ils ont fait le même exercice / vous vous souvenez / nous on avait essayé de le faire / dans une classe il y en a qui l'ont fait / (en désignant les schémas affichés au tableau) / il y a Léa / il y a Julie / il y a Mickael / il y a Nur et il y a Audrey / Alors ils ont pas fait exactement pareil mais on va essayer de voir comment ils ont fait et on va dire est-ce que / est-ce que c'est juste ou pas […]
> M : alors qu'est-ce qu'elle a fait Lea / Joss regarde / qu'est-ce qu'elle a dessiné » (groupe des « faibles »)
> « M : on va essayer un peu de regarder si les enfants eh ben ils ont trouvé / si ils ont réussi ou pas […] alors il y a plusieurs enfants / il y a Léa / il y a Seyla et il y a Hamdi / ces quatre enfants / on va juste regarder ces quatre enfants / qu'est-ce qu'ils ont fait ces quatre enfants » (groupe des « moyens »)

Le mot *schéma* n'est jamais prononcé. L'affichage des productions des élèves au tableau permet au maître, par une simple monstration, de désigner non pas l'auteur d'un schéma mais l'auteur d'un faire. Il ne dit pas « ici c'est le dessin de Léa », mais « ici il y a Léa »… Les verbes *dessiner* et *représenter* n'apparaissent qu'occasionnellement et uniquement pour attirer l'attention des élèves sur un élément du schéma.

Il entraîne les élèves dans cette logique, puisque à leur tour, ceux-ci quand ils décrivent ce qu'ils voient le font en utilisant eux aussi uniquement le verbe *faire* :

> « M : […] qu'est-ce qu'elle a fait Léa […] qu'est-ce qu'elle a fait Léa / Joss regarde qu'est-ce qu'elle a dessiné
> Samuel : elle a fait une erreur
> Huseyin : elle a fait
> Samuel : elle a fait une erreur
> Nabil : elle a fait des bleus
> M : alors / d'abord / qui est-ce qui peut décrire qu'est-ce qu'elle a fait Léa
> Joss : elle a fait des pièces
> Huseyin : elle a fait / elle a fait des petites billes » (groupe des « faibles »)

Faire veut aussi bien dire « dessiner » que « manipuler », « effectuer », ce qui est parfaitement normal dans une conversation spontanée, mais très problématique dans un travail sur un schéma.

2.1.2 Ce qu'il fait en les montrant

À plusieurs reprises l'enseignant manipule des objets du monde, en l'occurrence des cubes, mimant ainsi les gestes que l'élève auteur du schéma est supposé avoir effectués tout en le dessinant :

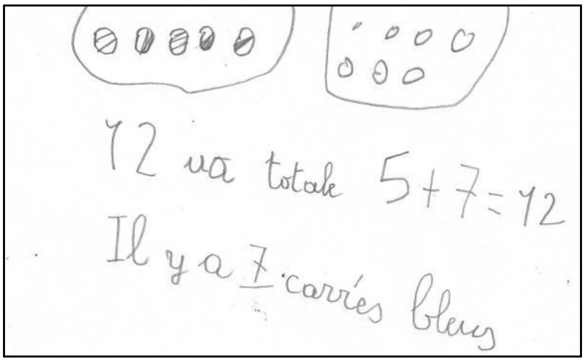


Figure 1. Schéma de Léa

Léa a dessiné séparément un ensemble de 5 ronds et un ensemble de 7 ronds. Rien dans son schéma ne permet de savoir comment elle a procédé pour trouver l'ensemble des 7 ronds. Le maître affirme alors qu'elle a sûrement compté à partir de 6 jusqu'à 12. Devant la résistance des élèves, il entreprend de restituer ainsi le recomptage qu'a effectué Léa selon lui :

> «M : [il a d'abord rempli une boîte avec cinq cubes rouges] et puis après ce qu'elle a dû faire / sûrement / elle avait dessiné [en prenant dans sa main un cube bleu] / un sixième carré / comme là ce qu'on a dit / un septième un huitième / un neuvième / un dixième / un onzième et un douzième [il rajoute des cubes bleus dans la boîte au fur et à mesure de son énumération] et après qu'est-ce qu'elle a fait Léa
> Sahra : ah après
> M : bah elle a dû compter / elle en a fait cinq [montre les cubes rouges dans la boîte] / ici [montre alors l'ensemble de cinq cubes dessiné par Léa] / et après elle a dû compter un deux trois quatre cinq six sept [compte les cubes bleus dans la boîte] / et puis voilà [montre l'addition de Léa] cinq plus sept égale douze » (groupe de « moyens »).

Durant toute cette démonstration le maître effectue des va-et-vient entre les objets du monde et le schéma. En disant « dessiner un sixième carré » tout en rajoutant des cubes dans la boîte il manifeste que *dessiner* et *faire* sont dans une stricte équivalence.

De la même manière il essaye de convaincre de leur erreur des élèves qui parlent d'addition pour interpréter la procédure supposée être celle de Hamdi qui a produit un schéma où cinq cubes sont barrés dans une série de douze. On observe alors le dialogue suivant :

> « Sahra : […] il a fait des carrés / mais il a pas fait son / la même addition
> M : ah ça correspond pas entre l'addition et puis euh / parce-que quand tu barres tu fais plus ou tu fais moins en général
> Sahra : ben je fais plus
> Remy : ah non moins
> M : ah faut vous mettre d'accord
> Ee : non plus
> Ee : non moins

> […]
> M : on va regarder un cas concret [il prend des cubes rouges dans sa main] / on en a un deux trois quatre cinq six / j'en barre [il baisse alors sa main droite sur sa main gauche] / poum j'en barre trois par exemple / je les mets dans ma poche comme si je les barrais d'accord / ben j'en ai rajouté ou j'en ai enlevé » (groupe des « moyens »).

Le maître utilise le terme *barrer* pour verbaliser deux actions (cacher des cubes avec la main, et les mettre dans sa poche). *Barrer*, *enlever*, *faire moins* sont alors des synonymes.

2.1.3 Comment il les interprète

Pour le maître, puisqu'un schéma n'est que la trace d'un faire, il donne obligatoirement à voir comment le problème a été résolu, ce qui est loin d'être toujours le cas. Plusieurs schémas peuvent se lire uniquement comme une représentation des données du problème, notamment ceux où les élèves ont uniquement dessiné deux ensembles disjoints (un ensemble de cinq cubes et un ensemble de douze cubes - cf le schéma de Seyla). Or le maître les interprète systématiquement comme étant la manifestation d'une stratégie d'addition défectueuse (parce que l'on pourrait obtenir comme résultat 17 cubes si l'on comptait tous les éléments représentés sur le schéma). Lorsqu'une élève s'oppose obstinément et avec pertinence à cette interprétation en soutenant que Seyla n'a pas fait d'addition (en effet, Seyla n'ayant pas écrit de phrase réponse, rien n'indique que sa réponse soit 17), le maître croit alors qu'elle se trompe d'opération mathématique, ce qui n'est pas le cas. Il ne peut pas admettre qu'un schéma ne permette pas de fournir de réponse à la question « qu'est-ce qu'elle a fait », ce qu'essaye de lui faire comprendre l'élève avec maladresse. Celle-ci n'arrive pas en effet à expliquer qu'en observant le schéma de Seyla on ne sait pas ce qu'elle a fait pour résoudre le problème, ni quelle est sa réponse, qu'on sait juste que les données sont exactes :

> « M : eh oui elle a ajouté au lieu d'enlever […] elle s'est trompée. […]
> Sahra : oui mais attends maître / elle a bien fait pareil / elle a pris euh comme toi [désigne la boîte à cubes] / elle a bien fait euh / sept plus douze […] » (groupe des « moyens »).

Sahra veut alors signifier au maître que la représentation de Seyla correspond rigoureusement aux manipulations qu'a effectuées le maître quand au début de la séance il a lu l'énoncé pour en extraire les données du problème.

2.2 Fonctions de l'écrit attribuées aux schémas

Explicitement ou implicitement, le maître attribue différentes fonctions de l'écrit aux schémas :

2.2.1 Fonction cognitive

En mettant en simple équivalence « agir sur des objets du monde » et « interpréter des représentations de ces objets du monde », l'enseignant rend d'une certaine manière la fonction cognitive transparente. Elle va de soi, elle est « visible », et en conséquence il n'est pas nécessaire d'expliciter quelles ressources le recours à l'écrit apporte à la réflexion sur le monde.

À plusieurs reprises le maître aurait eu l'occasion de montrer aux élèves en quoi des représentations graphiques pouvaient les aider lors de la résolution d'un problème :

2.2.1.1. Opération de dénombrement de collections comprenant plus de dix éléments

Les élèves de C.P. ont appris à se servir de la collection intermédiaire constituée par les doigts de la main. Mais celle-ci atteint vite ses limites quand on travaille sur des nombres supérieurs à dix, ce est le cas quand on veut décompter à partir de douze, par exemple.

Dans les trois groupes, plusieurs élèves se trouvent en difficulté quand ils entreprennent de s'aider de leurs doigts pour vérifier la justesse d'un surcomptage ou d'un décomptage. Il aurait alors suffi de leur montrer que le recours à une collection graphique permet de lever les difficultés rencontrées ; le maître ne le fait jamais, alors même que beaucoup de schémas représentent sous une forme ou sous une autre la collection des douze cubes.

Au lieu de cela, il va même dans le groupe des « moyens » suggérer à deux élèves une solution parfaitement inefficace : procéder au décomptage à partir de douze se servant de leurs quatre mains mises côte à côte :

> « M : «ben je crois que le problème c'est que tu as pas assez de doigts / alors viens ici et fais-toi aider par quelqu'un d'autre. »

Il place ainsi les élèves dans une situation absurde, au point que ces élèves de C.P., qui sont par ailleurs d'un assez bon niveau en mathématiques, finissent par donner l'impression qu'ils ne savent pas combien ils ont de doigts :

> « M : il en a combien des doigts Mohamed
> Remy : neuf dix onze
> Mohamed : ah nous on en a vingt
> M : oui bon avec vous deux vous en avez vingt mais pour l'instant
> Rémy : douze treize
> M : ça fait
> Rémy : hein
> M : bon allez / vous allez pas perdre de temps à ça quand même
> Rémy : deux trois quatre cinq
> M : Mohamed t'as combien de doigts

Mohamed : moi j’en ai / ai / euh
Rémy : six sept huit neuf dix onze
Mohamed : dix / là
M : dix / Rémy
Mohamed : et lui il en a dix
M : t’en mets combien pour en avoir douze […] » (groupe des « moyens »)

Le maître ne s’aperçoit pas qu’il est alors dans une situation idéale pour montrer aux élèves les limites de cette collection intermédiaire et l’aide que leur apporterait alors le recours à des collections graphiques.

2.1.1.2. Le schéma comme aide à la représentation du problème

Un problème du type parties/tout exige pour être résolu que l’on soit capable de mettre en relation les parties avec le tout. Les erreurs persistantes des élèves montrent que cela ne va pas de soi au CP. Or le maître ne se sert à aucun moment des schémas pour les aider à le faire, notamment en leur faisant préciser ce qu’est le tout, ce que sont les parties.

Il aurait par exemple pu montrer que le schéma de Seyla n’est pas satisfaisant parce qu’on ne comprend pas en le voyant que la première ligne est une partie de la deuxième et qu’il serait sans doute nécessaire de le modifier en intégrant la 1ère ligne dans la 2ème (figure 2)

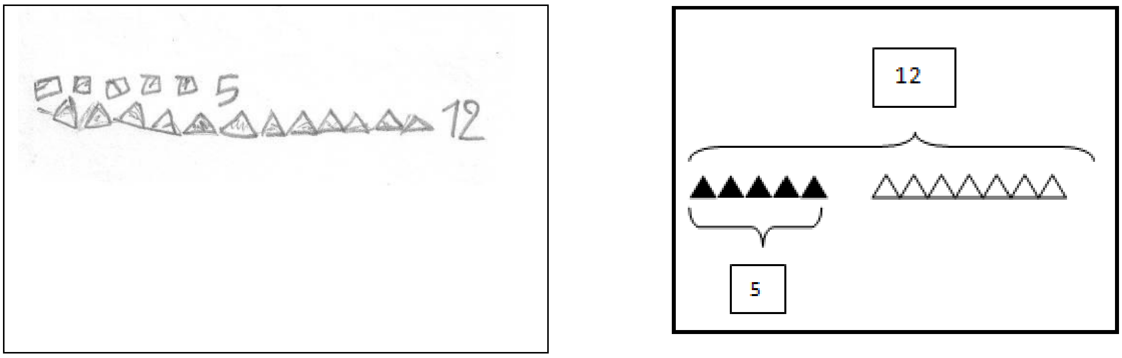


Figure 2. Schéma de Seyla et une modification possible

Il n’entreprend jamais de leur faire comparer deux versions d’un même schéma pour voir quelle est celle qui correspond le mieux au problème posé.

S’il ne le fait pas, c’est qu’il n’a pas à sa disposition une didactisation claire de la fonction cognitive de l’écrit, que l’institution ne lui fournit pas. Familiariser les élèves avec l’univers de l’écrit, c’est en effet pour elle leur faire prendre conscience que :

- l’écrit sert à se souvenir de ce que l’on a appris (fonction mémorielle)
- et sert à communiquer quand les partenaires de l’échange ne partagent pas le même espace-temps (fonction communicative). En témoignent les activités recommandées au cycle 2 (production de lettres à divers correspondants, rédaction de comptes rendus de visite, etc.).

Le maître convoque bien ces deux fonctions, la première de manière épisodique, la seconde implicitement sans pour autant les rendre opérationnelles.

2.1.2 Fonction mémorielle

Voici comment le maître met en scène de manière très spectaculaire ce que Nur est supposée avoir fait :

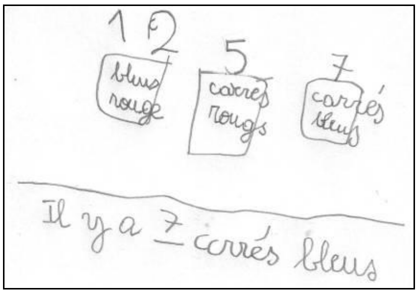


Figure 3. Schéma de Nur

> « donc Nur / et ben elle a bien fait l'exercice / […] elle a bien représenté la situation et après elle va trouver la solution / pour trouver / bon / vous voulez que je vous explique comment elle a fait pour trouver / je vais vous le dire / en fait c'est tout simple / ah Nur elle s'est dit / […] elle s'est dit euh une boîte contient douze carrés […] alors regardez ce qu'elle a fait pour bien s'en rappeler […] elle a marqué douze […] elle a marqué douze et elle s'est dit / attention faut que je m'en souvienne / il y a des carrés qui sont bleus et rouges / donc elle a marqué les deux / bleus et rouges […] et puis après / qu'est-ce qu'elle a dit / il faut que je me rappelle d'autre chose […] et après elle a lu l'énoncé encore / donc elle a vu qu'il y a cinq carrés rouges / elle s'est dit / oh il faut que je m'en souvienne aussi […] alors qu'est-ce qu'elle a fait pour s'en souvenir […] oui qu'est-ce qu'elle a fait […] elle a marqué cinq » (groupe des « faibles »)

L'intention du maître est certes de sensibiliser les élèves au fait que l'écrit aide à mémoriser les données d'un problème, mais elle est surtout de restituer en pas à pas le cheminement supposé de la pensée de Nur. La fonction mémorielle de l'écrit n'est invoquée qu'incidemment. Elle n'est pas un objet d'apprentissage sélectionné par le maître, ce qui explique qu'elle n'apparaisse qu'une fois, au détour de la mise en discours d'un raisonnement intérieur et que dans aucun des trois groupes le maître ne montre aux élèves que les autres schémas observés aident à mémoriser les données du problème. De plus, le schéma de Nur opère un mélange entre les données (12 et 5) et le résultat (7) qui n'est pas mis en évidence, alors qu'il aurait permis de comprendre que le schéma de Nur, sans le nombre 7, était une représentation possible des données du problème, sans être pour autant un schéma permettant sa résolution, puisque l'inclusion n'y est pas représentée.

2.1.3. Fonction communicative

La fonction communicative de l'écrit est elle toujours présente de manière implicite. Elle découle de la situation : si les élèves peuvent savoir ce que d'autres élèves ont fait dans un autre lieu à un autre moment c'est grâce aux schémas que ces derniers ont produits. Mais ce qui est communiqué alors, c'est bien une succession d'actions passées, rien de plus.

2.2. Apprentissages à construire aux yeux du maître

Si le maître consacre une séance entière à la résolution d'un problème déjà travaillé avec le support des schémas, c'est qu'il a nécessairement des intentions didactiques, qui transparaissent notamment dans ce qui est répété aux élèves, en particulier dans la phase de synthèse de la leçon, dont la fonction est sans doute d'instituer ce qu'il faut retenir.

2.2.1. Lisibilité de l'écriture

Le maître insiste tout particulièrement dans tous les groupes et à propos de plusieurs schémas sur la nécessité de « bien écrire ». Il montre combien il est gênant que le signe « + » ressemble malencontreusement au signe « x » ou que des chiffres soient mal formés, ce qui fait que dans un schéma on n'est pas certain que ce soit « 12 » qui y figure. Les élèves partagent son souci et déplorent que ce qu'ils voient soit un « grabouillage » ou un « charabia ». Les élèves du groupe des « forts » relèvent de manière impitoyable toutes les imperfections : « Il a écrit le 7 à l'envers », « Ils savent même pas écrire », « c'est des petits de première section ». Dans les trois groupes, une des leçons majeures est « qu'il faut bien écrire », ce qui constitue un appauvrissement de l'institutionnalisation possible (voir, pour un cas similaire : Margolinas & Laparra, 2008).

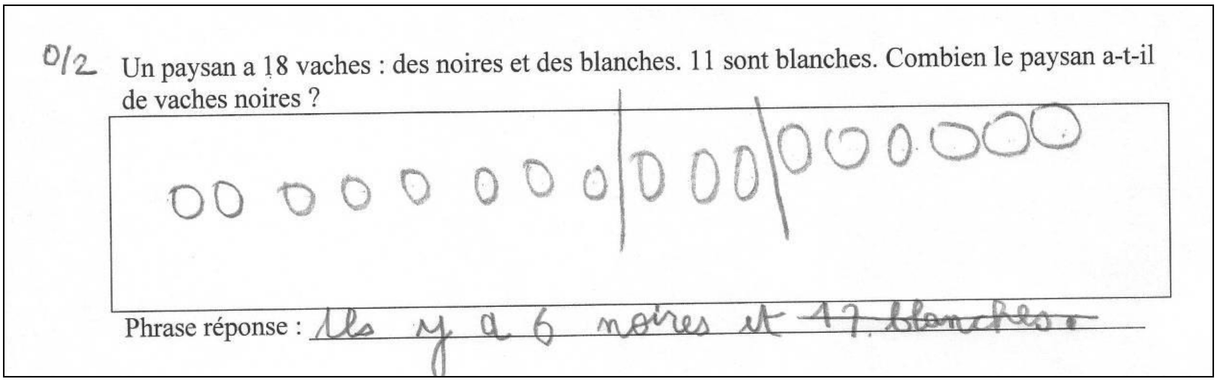
2.2.2. Justesse des informations chiffrées

Dans les trois groupes et pour chaque schéma étudié le maître fait vérifier par les élèves la conformité des informations chiffrées ou de leurs représentations graphiques (5 et 12) avec ce qui est dit dans l'énoncé du problème : « y-a-t-il bien cinq cubes dessinés, douze cubes ? », « le nombre est-il bien cinq, douze ? ». Quand il y a erreur (11 cubes représentés au lieu de 12), il rapporte cela au fait que l'élève n'a pas dû bien lire la consigne.

Ce faisant, il ne vise pas à faire apprendre que l'écrit permet de conférer le statut de données aux informations fournies par l'énoncé du problème, ce qui pourrait aider les élèves à ne pas confondre constamment ces données et le résultat recherché. Il s'efforce juste de doter les élèves d'une habitude méthodologique, à savoir lire attentivement la consigne d'un exercice, se conformant par là aux injonctions de l'institution qui recommande aux enseignants de tous niveaux et de toutes disciplines comme activité de re-médiation des exercices de lecture de consigne.

De plus, l'importance de la justesse des informations chiffrées prend le pas sur la qualité de modélisation du problème. En effet, un schéma qui, même avec une petite erreur (onze au lieu de douze) permet de représenter l'inclusion de la partie dans le tout, notamment peut être meilleur qu'un schéma dans lequel figurent seulement les nombres en jeu dans l'énoncé, même s'ils sont justes (cf. schéma de Julie, si l'on considère le fait de différencier graphiquement le cinquième élément de la collection de douze comme une tentative - certes inaboutie – pour isoler la partie dans le tout).

Quand, deux mois plus tard lors de l'évaluation de fin d'année, il donne une note sur deux points à un problème similaire, il attribuera la note (0/2) à Rémy (groupe des « moyens ») qui s'appuie sur un schéma pertinent dont seule une donnée numérique est erronée (17 ronds pour représenter 18 vaches, voir figure 4), alors qu'il eut été facile de valoriser l'effort de schématisation par une évaluation positive comme 1/2, d'autant que très peu d'élèves de la classe ont su résoudre ce problème.


0/2 Un paysan a 18 vaches : des noires et des blanches. 11 sont blanches. Combien le paysan a-t-il de vaches noires ?

Phrase réponse : Ils y a 6 noires et ~~17 blanches~~.

Figure 4. Extrait de la copie de Rémy à l'évaluation finale de fin d'année [c'est le maître qui corrige en rouge dans la phrase réponse de Rémy].

Le schéma est alors réduit à la dimension de simple attestation de la bonne ou mauvaise lecture de la consigne, il perd dès lors sa fonction d'outil de clarification de ce qui est posé comme une donnée et de ce qui est à rechercher.

2.2.3. L'usage comme mode d'appropriation

Pour le maître, il ne semble donc pas nécessaire ni d'enseigner explicitement les codes sémiotiques utilisés par ce type de schéma, ni les fonctions qu'il assume. On apprend à utiliser des schémas en en lisant. Il est à remarquer qu'un seul groupe (celui des « moyens ») a eu à en produire dans la séance précédente, les autres non. Il serait donc possible de lire des schémas sans en avoir réalisé soi-même.

D'une certaine manière, le maître reproduit ici un trait constant de l'apprentissage de l'écrit où durant tout le cycle 2 on fait lire aux élèves des textes qu'ils seraient incapables de produire. Le maître modifie en quelque sorte le vieil adage « c'est en forgeant qu'on devient forgeron » en « c'est en regardant le travail du forgeron qu'on devient forgeron ».

3. Ce qu'en font les élèves

3.1. Ils manipulent des nombres

Sous l'insistance du maître, les élèves décrivent ce qu'ils voient (des carrés, des ronds, des signes algébriques, des chiffres) sur les schémas, sans suivre un ordre précis, et souvent sans réussir à préciser à quoi cela correspond dans le problème. Le maître est alors souvent obligé de faire lien entre ce qu'ils disent et les termes du problème :

> « M : alors les cinq-là / ça correspond auxquels cinq / vous vous souvenez / il y a cinq carrés rouges / alors ça correspond à quoi ces cinq là
> Huseyin : eh ben
> M : à quoi ça peut correspondre
> Huseyin : bah ça correspond
> Samuel : à douze
> M : il y en a cinq / vous vous souvenez / on vous dit / il y a des carrés qui sont rouges et des carrés qui sont bleus / bon / il y a cinq carrés rouges / Léa a dessiné cinq ronds / alors ça correspond à quoi ces cinq ronds
> Elodie : à des / bah c'est des
> Huseyin : à des
> […] M : après on te dit qu'il y a cinq carrés rouges / donc du coup Léa / je sais pas / qu'est-ce qu'elle a voulu représenter
> Ee : ça
> M : bah les cinq carrés rouges / tout simplement
> Ee : ah oui » (groupe des « faibles »)

Et toujours sur l'insistance du maître, qui leur fait systématiquement dénombrer des collections correspondant au tout ou à l'une des parties et qui sont dans un va-et-vient incessant entre elles, des collections d'objets (des cubes), des collections intermédiaires (leurs doigts) ou des collections graphiques, les élèves disent des nombres (cinq, sept, douze, dix-sept) en donnant l'impression de perdre de vue le problème posé. Durant toute la séance, on assiste à une succession d'erreurs :

- Le résultat recherché, 7, est fourni en réponse à des questions sur les données.
- L'une des données (5 ou 12) est fournie en réponse à des questions sur le résultat.

- Les données sont mélangées (12 en réponse à une question sur le nombre des carrés rouges, 5 en réponse à une question sur le nombre de carrés bleus).

Les élèves semblent alors manipuler les nombres en jeu au hasard.

3.2. Ils changent les données

Confrontés à des schémas différents représentant un même problème, certains élèves croient que chaque schéma correspond à un problème différent. Ils ne voient pas la permanence des données sous la diversité des représentations ; un nouveau schéma fait supposer de nouvelles données et de la même manière un schéma erroné peut être justifié en inventant de nouvelles données.

Dans deux groupes, à la fin de la séance, le maître introduit un deuxième problème :

> « Dans le bus qui arrive, il y a 12 enfants. À l'arrêt, 4 enfants descendent et personne ne monte. Combien y-a-t-il d'enfants dans le bus lorsqu'il repart ? »

En commentant un schéma (voir annexe 2) où sont représentés côte à côté 12 et 4 ronds, le maître dit :

> « M : Imagine pourquoi il s'est trompé l'enfant […]
> Huseyin : ah parce que dans le car il y a / peut-être qu'il y en avait seize avant
> M : non au début dans le car il y en avait douze on en est sûr.
> […]M : bah non il a fait comme si / non comme si il y avait quatre nouveaux enfants qui montaient dans le bus.
> […]
> Huseyin : si peut-être / si peut-être qu'il y en a / que les quatre ils sont descendus et il y / y a des autres peut-être qui sont descendus / qui sont partis de l'école / ils sont montés dans le car / […] » (groupe des « faibles »)

À la sollicitation du maître pour qu'ils imaginent ce que les auteurs des schémas ont pensé, les élèves répondent en imaginant un nouveau « monde » comme cadre de référence au problème.

4. Problèmes que pose l'interprétation d'un schéma

Au fur et à mesure du déroulement de la séance, on voit donc dans les trois groupes que le schéma n'aide pas les élèves à mieux maîtriser les procédures à mettre en jeu pour résoudre le problème posé. Il semble au contraire fonctionner comme un écran, contribuant à ce que maître et élèves ne soient pas dans le même univers de cognition. On peut même affirmer qu'il ajoute aux difficultés rencontrées par les élèves dans la première leçon au sujet du même problème.

Cela n'a rien d'étonnant, si on s'intéresse aux diverses compétences que l'on active quand on utilise un schéma.

4.1. Compétences requises pour interpréter ce qui est représenté

4.1.1. Compétences requises pour interpréter la représentation des données

D'un schéma à l'autre, des données identiques sont représentées sous des formes graphiques différentes : aux cubes du problème (ou aux enfants de l'autobus) correspondent graphiquement des traits verticaux, des triangles, des ronds, des carrés, grisés ou non. À l'inverse des « dessins » identiques représentent des objets différents : un carré est d'abord un cube, puis un enfant dans l'autobus. Tous les élèves, même les meilleurs, sont gênés par ce phénomène inhérent à toute schématisation qui utilise obligatoirement des codes sémiotiques arbitraires. La longue fréquentation de ces codes, présents dans beaucoup de fiches utilisées en G.S.M. et au C.P. n'a pas pour autant construit chez les élèves des savoirs utiles en la matière, faute d'avoir été l'objet d'un apprentissage méthodique, progressif et explicite.

4.1.2. Compétences requises pour interpréter la représentation du problème à résoudre

Le premier problème doit amener les élèves à se représenter la relation existant entre un tout dont le cardinal est donné et ses deux parties dont le cardinal de l'une est connu et l'autre à trouver.

Les schémas étudiés peuvent alors être divisés entre trois types qui présentent tous des difficultés :

a) Deux ensembles disjoints représentant les parties (cf le schéma de Léa). Si on se place dans une perspective de production, comment représenter graphiquement une partie dont on ne connaît pas le cardinal, sauf à avoir déjà résolu le problème ? Le travail sur ce type de schéma ne peut que conduire les élèves à mélanger les données et le résultat.

b) Deux ensembles disjoints représentant le tout et la partie connue (cf le schéma de Seyla). Comment alors représenter l'inclusion de la partie dans le tout ?

c) Un ensemble qui correspond au tout (cf les schéma de Hamdi et d'Audrey) dans lequel une partition a été opérée par différents procédés (coloriage des éléments d'un sous-ensemble). Le problème qui se pose alors est que le deuxième sous-ensemble n'est présent que par défaut et n'est pas matérialisé explicitement.

Les élèves ne sont donc jamais confrontés à un schéma représentant le problème dans sa totalité. En procédant ainsi, le maître se conforme d'ailleurs aux I.O. :

> « Dès le cycle 2, les élèves doivent prendre conscience du fait que résoudre un problème ne revient pas à trouver, tout de suite, les calculs à effectuer pour répondre à la question posée. Une élaboration est en général nécessaire, faite d'étapes ou d'essais plus ou moins organisés. Un même problème, suivant le moment où on le propose, suivant les connaissances des élèves à qui on le destine et suivant la gestion qui en est faite, peut être résolu par élaboration de procédures personnelles ou, plus tard, par reconnaissance et utilisation d'une procédure experte appropriée. Dans certains cas la résolution des problèmes est organisée par l'enseignant pour, à partir des solutions personnelles élaborées par les élèves, déboucher sur une nouvelle connaissance (notion ou procédure)[6]. »

Le schéma n'est alors qu'un moyen commode pour créer une situation où les élèves travaillent sur des « solutions personnelles élaborées » par des pairs. Le fait que les schémas produits par les élèves soient nécessairement imparfaits et qu'ils puissent de ce fait perturber la résolution du problème ne peut qu'échapper à l'enseignant, et cela d'autant plus qu'il complète oralement chacun des schémas. Mais ces compléments oraux ne sont jamais traduits graphiquement à partir d'un questionnement sur la relation entre le tout et les parties.

4.1.3. Compétences requises pour interpréter la représentation de la procédure de résolution

Les interactions orales conduisent souvent à une modification de la nature du problème traité : une représentation graphique d'un problème statique du type parties/tout (où est schématisé une boîte comprenant deux ensembles de cubes) est verbalisée et mimée avec du matériel en termes dynamiques correspondant à un problème de transformation d'état[7] (comme le problème du bus) : on part d'une boîte dans laquelle il y a déjà des cubes et dans laquelle on doit en rajouter d'autres pour obtenir le bon nombre de cubes, ce qui transforme la nature du problème posé. Cette modification qui simplifie de fait le problème appellerait d'ailleurs des schématisations bien différentes, dans lesquelles l'avancée temporelle serait représentées (par exemple par des flèches, ou par des schémas numérotés).

En outre les schémas présentés arrivent au mieux à représenter une procédure de décomptage (ce sont les schémas qui présentent des éléments barrés) mais pas à représenter une procédure de surcomptage, alors que le surcomptage est la procédure majoritairement utilisée par les élèves qui trouvent le résultat et que c'est elle que le maître veut y faire lire.

---

[6] B.O. 14 février 2002.

[7] Suivant la classification des problèmes additifs introduites par Gérard Vergnaud, *op. cit*.

Ne pouvant y arriver, il est toujours obligé d’en revenir au surcomptage de collections d’objets réels. Il fait alors croire aux élèves qu’une procédure est visualisée, grâce à la schématisation, alors qu’elle ne l’est pas.

4.2. *Successivité temporelle et juxtaposition graphique*

Le maître se réfère tour à tour à des ordres qu’il pose comme équivalents :

- L’ordre d’apparition des informations dans l’énoncé du problème.
- L’ordre dans lequel il effectue les manipulations sur les cubes.
- L’ordre suivi par l’auteur d’un schéma pour le produire.
- L’ordre de la lecture du schéma.
- L’ordre de l’écriture algébrique.

4.2.1. *L’ordre des informations dans l’énoncé*

Le cardinal du tout est fourni en premier dans l’énoncé, le fait qu’il y a des carrés de deux types apparaît en second, le cardinal d’une partie du tout en troisième et ce qui est à trouver en dernier. Le maître reformule oralement la consigne à diverses reprises en transformant son ordonnancement en étapes successives :

> « M : eh oui / alors donc une boîte contient douze carrés / on peut avoir des carrés bleus et des carrés rouges / bon est-ce qu’ils sont tous bleus
> Carla : non
> M : ou alors est-ce qu’ils sont tous rouges
> Carla : non
> […] M : il y a cinq carrés rouges […] il y a cinq carrés rouges / allez on les met les cinq / un deux trois quatre et cinq carrés rouges / au total dans ma boîte il y en a douze des carrés […] il en manque combien […] alors douze / on peut / on va voir / il faut qu’il y en ait douze / il y en a cinq / allez on y va » (groupe des « forts »).

Ainsi, l’organisation propre à l’énoncé écrit est subtilement modifiée au fur et à mesure des reformulations orales (de la succession douze/cinq on passe à la succession cinq/douze) et ces reformulations orales sont le seul fait du maître. Les élèves en sont incapables, ce qui les gênera lorsqu’ils auront à résoudre seuls des problèmes similaires dans les évaluations de fin de période, quelques semaines plus tard.

4.2.2. *Ordre dans lequel sont effectuées les manipulations des cubes*

L’ordre induit par la consigne, au cours des diverses manipulations, n’est pas respecté : la manipulation qui correspond à l’information qui était en troisième place est en général effectuée en premier par le maître : il ne se saisit jamais d’abord d’une boîte où il y aurait 12 cubes, dont 5 cubes rouges. Il prend une boîte vide, y place 5 cubes rouges et demande ce qu'il faut faire ensuite. Sa manière de procéder peut s'expliquer par les contraintes d'une présentation devant les élèves, suivant un mode ostentif (Salin, 1999). Il serait possible de prendre une boîte déjà constituée dont cinq sont rouges et d'autres (bleus) sont cachés (par exemple dans un papier aluminium), mais il serait alors impossible de montrer aux élèves qu'il y en a bien douze avant qu'ils ne proposent une solution. De plus, il n'est pas certain que le maître perçoive de façon claire la différence entre le problème qu'il représente avec les cubes (problème de transformation d'état) et celui qu'il a posé (problème parties/tout). Plus généralement, la situation effective qui est installée pour les élèves n'est pas véritablement prise en considération (voir Laparra & Margolinas (2008) pour un autre exemple de ce phénomène).

4.2.3. Ordre dans lequel a été réalisé le schéma

Les schémas ne permettent pas de savoir dans quel ordre les élèves qui en sont les auteurs les ont engendrés : Seyla a-t-elle dessiné d'abord l'alignement des 5 carrés et ensuite celui des 12 triangles, ou a-t-elle ajouté, après avoir dessiné les triangles, au dessus, la ligne des 5 carrés ? Quand a-t-elle écrit 5 et 12 ? A-t-elle dessiné une première ligne de carrés puis écrit 5 à droite et dessiné une seconde ligne de triangles puis écrit 12, ou a-t-elle dessiné d'abord les deux lignes et écrit ensuite les deux nombres ? Les schémas de Damien et de Nur posent des problèmes identiques.

Le schéma a-t-il été réalisé une fois résolu le problème (ce qui peut être le cas pour Léa) ou a-t-il été réalisé au fur et à mesure de sa résolution ? Rend-il compte après coup de la résolution du problème sans y avoir aidé ou est-il un élément déterminant dans cette résolution ?

Hamdi et Audrey peuvent par exemple avoir procédé au décomptage des cinq cubes en manipulant des collections de cubes, et avoir ensuite représenté graphiquement l'opération, ou ils peuvent avoir effectué le décomptage directement sur la collection graphique. Dans le premier cas ils peuvent avoir parfaitement effectué le décomptage à partir de 12, mais pas nécessairement, la représentation graphique ne reproduisant pas obligatoirement fidèlement la procédure mise en jeu antérieurement, dans la mesure où sa fonction n'est alors pas de permettre la résolution mais de montrer une solution.

Du fait de la coexistence lors de la séance de ces différents ordonnancements, les élèves ne peuvent que difficilement savoir auquel le maître se réfère quand il pose une question du type : « et ensuite », « et après ». Ce qui est « après » l'est-il parce qu'il figure à droite sur le schéma, parce qu'il est sur une ligne située en dessous d'une autre, parce qu'il s'agit d'un objet qui aurait été saisi après un autre objet dans une manipulation, parce qu'il est supposé avoir été produit graphiquement après un autre « dessin », parce qu'il est apparu dans la consigne après une autre information ?

Dans le jeu des interactions orales, ces ordonnancements sont verbalisés le plus souvent comme se déroulant dans le temps (en témoignent les connecteurs « et puis » et « alors »). Les élèves courent donc le risque de penser que tous les ordonnancements, y compris ceux de l'écrit (ceux de l'énoncé, du schéma, de l'écriture algébrique) obéissent à une simple logique de succession, ce qui le plus souvent n'est pas le cas : l'écriture « 5 + 7 » est réversible, l'énoncé pourrait donner les informations dans un autre ordre, l'organisation d'un schéma dans l'espace graphique selon l'axe horizontal et vertical intègre d'autres paramètres que des paramètres temporels.

4.3. Le schéma, aide cognitive ou source de difficultés ?

Outre le fait dont nous avons déjà parlé que certains élèves finissent par croire qu'à chaque schéma correspond un problème différent, les élèves vont, en utilisant les schémas, voir se renforcer des difficultés normales à leur âge, alors même que le schéma aurait pu aider à les surmonter. On observe en effet des erreurs récurrentes :

4.3.1. Confusion entre données et résultat

Plusieurs schémas représentent le problème résolu : Nur dessine un rectangle dans lequel est écrit « carrés bleus » et au-dessus duquel est écrit 7. Léa dessine un ensemble de 7 « ronds ». Hamdi dessine une ligne de 12 carrés dont cinq sont barrés. Il écrit 5 sous les carrés barrés, et 7 au bout des carrés restants. Interrogés sur ces schémas, beaucoup d'élèves montrent par leurs réponses qu'ils traitent 7 comme une donnée et 12 comme le résultat à trouver.

> « Carla : mais non elle s'est trompée
> M : pourquoi elle s'est trompée […]
> Carla : la réponse c'est douze
> M : non la réponse c'est sept » (groupe des « forts »)

Ceci s'explique facilement : les schémas en question ne distinguent pas clairement la phase d'exposition du problème de sa phase de résolution. De plus, 12, résultat d'une simple addition connue (5 + 7 = 12) occupe une position de résultat de façon plus crédible que 7. Au moment de la lecture tout ce qui est visible d'un même regard tend à être considéré comme ayant le même statut. La notion de donnée est très lentement élaborée et stabilisée au cours de la scolarité, mais les schémas étudiés ici ne sont sans doute pas une aide efficace pour y parvenir.

4.3.2. Attribution à tort d'une valeur temporelle à des représentations qui en sont dépourvues

Ainsi que nous l'avons déjà vu, les élèves peuvent être conduits à interpréter une représentation graphique en termes temporels : ce qui est à gauche est pensé comme antérieur à ce qui est à droite ; la ligne du dessous est postérieure à la ligne du dessus. Dans certains cas cela est pertinent (la bande numérique reproduit bien l'ordre de la comptine orale où 2 vient après 1), dans d'autres non. Au moment où ils devraient établir des relations claires entre les données d'un problème statique, ils ne perçoivent plus ces données que comme une simple suite d'éléments. La preuve en est fournie par le fait qu'ils n'utilisent jamais des expressions comme « il y a en tout… » ou qu'ils ne disent jamais que « les cubes rouges sont une partie des 12 cubes », ou que « les cubes bleus et les cubes rouges sont 12 en tout », mais qu'ils disent plutôt « il y a… et il y a … », ce qui les empêche par exemple de voir que l'ordre dans lequel on évoque les deux parties du tout n'a aucune importance dans ce type de problème. On peut bien sûr sensibiliser des élèves à ce phénomène à l'oral lors de manipulations d'objets mais moins aisément qu'à l'écrit dont la permanence permet la confrontation dans la simultanéité de deux représentations :

En effet, à l'intérieur de chaque cadre de la figure 5, les représentations suivantes sont rigoureusement équivalentes :

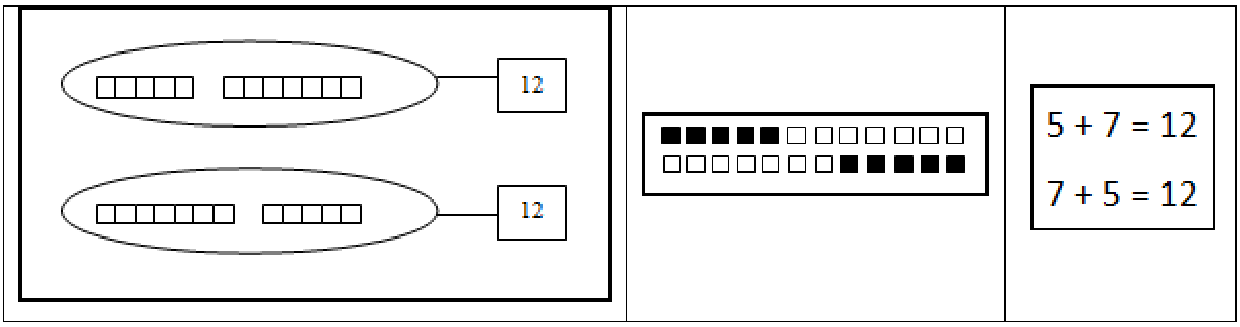


Figure 5. Couples de représentations équivalentes du problème des cubes

Or dans tous les schémas où sont représentés les deux parties du tout la partie dont le cardinal est cinq a toujours été placée à gauche de l'autre, ce qui s'explique aisément, mais qui n'offre pas à l'enseignant l'occasion d'expliciter cette capacité qu'a l'écrit d'organiser l'espace indépendamment de toute considération temporelle, permettant ainsi aux élèves d'apercevoir le caractère statique du problème (comment connaître la deuxième partie d'un tout quand on connaît uniquement le tout et l'autre partie).

Entrer petit à petit dans la « raison graphique » (Goody, 1977/1979) suppose que l'on commence à comprendre une différence essentielle entre le discours oral et certains usages non discursifs de l'écrit : le discours oral se déroule sur l'axe du temps de manière irréversible. L'écrit, quand il ne reproduit pas la linéarisation de l'oral, peut disposer sur le papier des éléments sans impliquer une quelconque organisation temporelle (même si dans certains cas il peut parfaitement le faire) : dans un tableau où figurent plusieurs colonnes, les colonnes peuvent être disposées de gauche à droite selon divers ordres (alphabétique, notionnel, temporel, mais aussi arbitraire).

Les jeunes élèves ne sont d'ailleurs pas insensibles à ce phénomène : la liste des élèves présents dans la classe à l'école maternelle est souvent d'abord produite selon une logique temporelle, chaque élève apposant son « étiquette » à la suite des autres au moment où il entre dans la classe ; l'ordre de la liste correspond bien alors à l'ordre des arrivées successives dans la classe. Mais certains élèves modifient l'ordre de la liste, sans que personne ne s'en aperçoive, en allant replacer leur étiquette en tête de colonne, alors qu'ils ne sont pas les premiers à être arrivés (Delaborde, 2009). Ces élèves savent que la place dans la liste manifeste une hiérarchie sociale - puisqu'ils sont les premiers dans la liste ils sont les premiers de la classe. De telles intuitions sont trop fugitives pour être relayées par les enseignants.

De ce fait les élèves ne peuvent que penser que l'univers de l'écrit est une simple reproduction de ce que l'on dit, ou de ce que l'on fait, pas de ce que l'on pense.

4.3.3 Linéarisation des nombres et valeur de certains signes algébriques (+, -, =)

Un élève, Hamdi, qui a pourtant correctement résolu le problème, ce dont témoigne son schéma et sa réponse (figure 6), fournit néanmoins une écriture algébrique fausse.

Figure 6. Schéma de Hamdi

Or à ce niveau, on peut supposer que cet élève sait parfaitement que 12 + 5 ne peuvent pas faire 7. Cette écriture, sauf à penser que l'élève écrit quelque chose qu'il sait être faux, a vraisemblablement pour lui un tout autre sens. Il écrit sans doute à gauche les deux données du problème qu'il articule à l'aide du signe « + » qui ne correspond alors pas pour lui au signe de l'addition mais à une simple association, de même que le mot *et* ne correspond pas nécessairement à une addition. Puis il écrit à droite le résultat, le signe « = » étant l'annonce du résultat (ce qui montre au passage qu'il différencie pertinemment les données et le résultat). L'écriture correspond à un énoncé mental du type « j'ai 12 cubes en tout et j'en ai 5 rouges ça fait 7 cubes bleus ». Elle reproduit l'ordre qu'il a suivi pour résoudre le problème et engendrer son schéma (les deux pouvant avoir été simultanés ou non) : il a dessiné d'abord 12 cubes, puis il en a barré 5, il a compté qu'il en restait 7. Le signe « = » correspond donc à un signe d'annonce du résultat, ce qui est normal à ce niveau scolaire, le caractère réversible de l'égalité n'étant acquis que très progressivement au cours de l'apprentissage.

L'écriture produite par d'autres élèves, 5 + 7 = 12, s'affranchit de la manière dont est posé le problème. Elle nécessite pour être engendrée comme preuve dans la résolution d'un problème parties/tout que l'on soit capable d'admettre que le résultat recherché figure à gauche du signe « = ». On peut penser que les élèves qui recourent à cette écriture convoquent ainsi un résultat opératoire déjà mémorisé, 5 + 7 = 12, peut-être parce-qu'ils l'ont utilisé pour résoudre le problème, mais surtout parce-qu'ils ont compris que le maître valorise les écritures algébriques considérées à tort comme preuve d'une plus grande maîtrise des opérations intellectuelles.

L'écriture qui correspond exactement au problème 12 – 5 = 7 n'est pas disponible pour la majorité des élèves qui n'ont pas encore été familiarisés dans cette classe avec des écritures faisant intervenir la soustraction (dans la première séance, elle est produite seulement par la meilleure élève de la classe, après une intense réflexion).

Il est à remarquer que plusieurs élèves ne sont absolument pas gênés par l'écriture de Hamdi, qu'ils trouvent parfaitement juste, sans doute parce qu'ils en comprennent les raisons.

Faute d'une conscience claire de la distance très importante qui existe entre une écriture algébrique dont le sens est maîtrisé et une écriture qui pour l'élève est en quelque sorte un moyen pour noter à l'écrit en le simplifiant un énoncé oral, le maître ne peut ni interpréter correctement ce que fait Hamdi, ni profiter de l'occasion pour clarifier la valeur du signe « = ». Il peut tout au plus introduire par « la bande » le signe « - », en expliquant aux élèves que puisque Hamdi a barré des cubes, il aurait dû écrire le signe « - ».

> « M : ah oui il aurait fallu qu'il marque douze moins cinq parce-qu'il en a barré cinq »

4.3.4. Absence de comparaison des schémas entre eux

4.3.4.1. Des comparaisons sont possibles

Chaque schéma est étudié séparément et successivement par le maître, comme une collection d'exemples. Ils sont « interrogés » comme on interroge des élèves les uns après les autres, pour vérifier ce que ceux-ci comprennent.

Il n'oppose pas entre eux des schémas qui représentent les relations parties-tout de manière très différente :

- Léa représente les deux parties, mais pas le tout.
- Damien et Julie représentent le tout et une partie sans les articuler (sauf si, comme on l'a vu, on considère dans le cas de Julie, que le fait de mettre en couleur le cinquième élément du tout est un début d'articulation)
- Nur représente le tout et les deux parties sans les articuler.
- Hamdi et Audrey représentent une partie intégrée au tout, mais les deux parties ne sont pas visualisées en tant que telles.

4.3.4.2. Une occasion manquée

De la même manière il ne rapproche pas deux schémas du même type comme celui d'Audrey et de Hamdi, alors même que certains élèves lui proposent de faire de telles comparaisons : Sahra tente par exemple d'interpréter le schéma de Seyla à la lumière de celui de Hamdi.

> « Sahra [à propos de la production de Seyla]: mais c'est comme lui [montre la copie de Hamdi / c'est comme lui […]
> Sahra: il a fait plus et […]
> Sahra: il a barré / regarde un deux trois quatre cinq six sept huit neuf dix onze douze y en a pareil mais […] c'est sauf que c'est l'addition c'est pareil c'est pareil que Seyla » (groupe des « moyens »).

Le fait que le maître n'aide nullement Sahra dans cette tentative difficile montre qu'il ne la considère pas comme importante dans son projet d'enseignement.

4.3.4.3. La question de la légende

Il n'attire pas l'attention sur le fait que certains schémas comportent des légendes (comme celui de Nur) et de ce fait sont plus faciles à lire que ceux qui ne sont pas légendés, ou que la difficulté de représenter une partie dont on ne connaît pas le cardinal peut être contournée en écrivant un mot en toutes lettres (5 + bleus = 12).

4.3.4.4. Distinction entre exposé du problème et résolution

Il ne leur fait pas découvrir qu'un schéma comme celui de Floriane donne sur la première ligne l'exposé du problème et sur la deuxième ligne sa solution, alors que le schémas de Nur ne distingue pas l'exposé du problème et sa solution (figure 7).

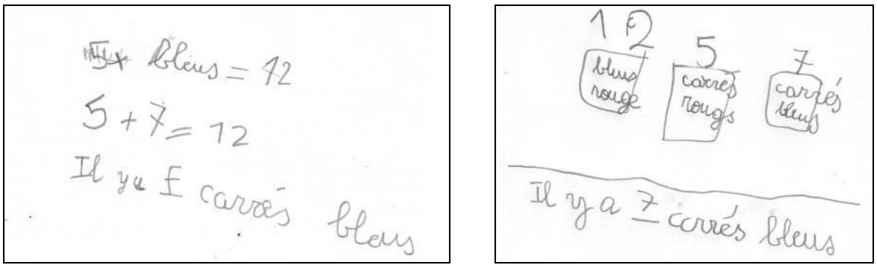


Figure 7. Schéma de Floriane et schéma de Nur.

4.3.4.5. Mise en évidence de la résolution

Enfin il n'oppose pas les schémas qui visualisent mieux la procédure de résolution du problème (comme celui d'Audrey) à ceux qui le font moins nettement comme celui de Léa.

4.4. Synthèse

Bien évidemment, il n'est pas question que l'ensemble de ces questions soient abordées au cours d'une même séance dans un C.P. Mais n'en traiter aucune revient à considérer ces différentes tentatives de schématisations comme équivalentes et, en effaçant les différences, à les rendre transparentes. Le maître ne voit dans le schéma qu'une ressource pour reconstituer un travail effectué antérieurement par des élèves. La situation installée par le maître est investie, au moins partiellement, par les élèves, qui de ce fait sont en position favorable pour entrer dans un processus d'apprentissage relatif aux schémas. Dans la situation effective, il y a ainsi deux objets cognitifs en jeu : l'un qui est en jeu dans la résolution du problème, l'autre dans sa schématisation ; seul le premier est abordé, explicitement le second est laissé de côté, alors même que les schémas et la discussion sur les schémas occupent presque toute la séance.

C'est ce qui explique que loin d'être une aide, les schémas se révèlent être plutôt un obstacle à la résolution du problème pour la majorité des élèves qui ne manifestent aucun progrès de ce point de vue entre la première séance, où ils travaillaient sans schéma (sauf le groupe des « moyens ») et la deuxième séance où ils travaillaient « avec » eux, mais non pas « sur » eux.

5. Raisons pour lesquelles le schéma n'est pas pensé comme un objet d'apprentissage

Si le maître est si peu attentif aux savoirs dont on doit disposer pour qu'un schéma soit réellement une aide cognitive, c'est pour plusieurs raisons :

5.1. Le schéma, écrit intermédiaire produit pour soi

À la différence d'autres schémas utilisés de manière instituée par la discipline qui y recourt (il est alors un objet disciplinaire en lui-même, comme par exemple la figure en géométrie ou le graphe des fonctions en analyse), le schéma produit ici n'est qu'un écrit pour soi, ou pour un groupe spécifique comme la classe. Il n'est qu'une aide pour travailler et il doit disparaître sitôt utilisé. Il a le même statut pour les mathématiques que le brouillon pour le français. Celui-ci n'est en effet intéressant que parce qu'il est la trace d'une étape dans un processus d'écriture. Il s'efface une fois écrit le texte attendu. Parmi les différents types d'écrit, l'écrit pour soi est celui qui est le moins travaillé par l'école (seuls les brouillons d'écrivain sont au collège l'objet d'une étude attentive). Il ne peut dès lors que rester la chasse gardée d'une élite intellectuelle.

5.2. Le schéma, outil méthodologique transversal

Le schéma peut d'autant moins être un objet relevant de la didactique d'une discipline particulière qu'il est utilisé par toutes et que de ce fait il est l'un des « outils transversaux » dont on apprend à se servir lors d'activités dites « méthodologiques » qui s'attachent aussi bien à la lecture des consignes qu'aux ressources documentaires.

Les élèves, à tous les niveaux de leur scolarité, et tout particulièrement les élèves en difficulté lorsqu'ils bénéficient d'un dispositif d'aide, se voient bien proposer quelques séances dites de méthodologie dont l'efficacité est faible, puisqu'on les reproduit avec eux d'année en année. Si ces séances n'ont que peu d'effets sur les élèves (les enseignants ne cessant de déplorer que les élèves ne sachent ni lire les consignes, ni se documenter), c'est sans doute parce qu'ils sont confrontés à des activités détachées de tout enjeu disciplinaire et non pas à des objets de savoirs dont l'apprentissage serait organisé et planifié selon des progressions s'appuyant sur une analyse de leurs spécificités et sur une analyse des situations à mettre en œuvre pour les enseigner.

5.3. Le schéma objet à regarder

Le schéma est simplement donné à voir. Sa visibilité immédiate lui confère en quelque sorte une évidence, dispensant de tout apprentissage. En cela il est traité par l'enseignant comme tous les autres objets que l'école produit pour familiariser les élèves avec l'univers de l'écrit, « étiquettes », listes affichées au mur de la classe, calendriers, bandes numériques, fiches à remplir. L'organisation interne de ces objets, les codes sémiotiques utilisés, leurs fonctionnalités diverses ne sont en effet pas travaillés en tant que tels (Delaborde ; *op. cit.*). Ils semblent tous s'imposer d'eux-mêmes à ceux qui les regardent et les manipulent. Paradoxalement tout ce qui dans l'écrit ne relève pas du discursif langagier, ce que J. Goody (*op. cit.)* appelle « la raison graphique », reste transparent, invisible, du fait même de son évidence matérielle. Le schéma est là, il suffit de le regarder, pense-t-on, mais ses particularités sémiotiques et la réorganisation qu'il opère sur le monde en le représentant restent, elles, invisibles.

On ne voit pas comment un maître pourrait à lui seul vaincre tous ces obstacles engendrés par des représentations communément partagées par la communauté enseignante. Le maître de la classe considérée a bien l'intuition que l'usage du schéma peut être une aide cognitive dans une situation de résolution de problème, ce qui est déjà remarquable en soi, puisque l'institution ne lui fait aucune injonction en la matière. Lui et ses élèves donnent à plusieurs reprises, dans les trois groupes, l'impression d'être très près de prendre conscience de l'un des problèmes décrits plus haut. Ce sont précisément les moments où l'activité semble « tourner en rond » et ne plus avancer, les élèves paraissant n'être plus capables que de fournir des réponses ou répétitives ou contradictoires ou non pertinentes aux questions qui leur sont posées. Le maître n'est alors pas en mesure, malgré toutes ses qualités professionnelles, de les aider à dépasser ces phases de piétinement, faute d'avoir à sa disposition une description didactisée de cet outil. Il est en quelques sorte dans la même position que ses élèves, aveugle qu'il est obligé d'être à ce qu'est un schéma au plan sémiotique et cognitif.

Les élèves auraient alors besoin d'un début d'apprentissage organisé de l'une des spécificités du schéma. La simple confrontation avec ces outils ne saurait en construire une maîtrise progressive. S'il en allait autrement, on devrait en effet observer des différences notables entre les trois groupes, les élèves dits « forts » ayant à leur disposition des ressources supérieures aux autres (meilleure capacité de lecture, meilleure compétence langagière, meilleure maîtrise numérique…). Or s'il n'en est rien, c'est parce qu'ils n'ont pas de savoirs supérieurs aux autres sur les schémas.

6. Quelques propositions pour l'enseignement des schémas au cycle 2 et au début du cycle 3

La complexité des problèmes posés par l'utilisation de schémas pourtant supposés extrêmement simples exige d'une part que tous les points travaillés ne le soient pas simultanément et d'autre part que chaque point soit abordé à plusieurs reprises à différents niveau de la scolarité avant de pouvoir être considéré comme acquis.

Qu'ont besoin de savoir de jeunes élèves en la matière ? L'analyse des difficultés rencontrées par les élèves observés nous conduit à faire les propositions suivantes qui s'inscrivent toutes dans un apprentissage planifié des différentes ressources cognitives de l'écrit.

6.1. L'écrit comme moyen de fixer des données

Rien n'est plus difficile, nous l'avons vu, pour un jeune élève que d'admettre le caractère contractuellement intangible des données d'un problème mathématique ou encore d'admettre que dans certains cas un problème ne peut avoir qu'une seule solution. Durant les deux séances considérées, dans les trois groupes, l'ensemble des élèves le démontre à nouveau. Ce que « l'on sait », puisque « la consigne l'a dit », n'acquiert pas *ipso facto* le statut de données.

Or l'écrit fournit une aide précieuse pour le faire :

On peut apprendre à écrire en « toutes lettres » ce que l'on sait et qui ne peut être modifié. Ici par exemple on pourrait écrire (au C.P. le maître peut le faire sous la dictée des élèves) :

> « On sait :
> - qu'il y a 12 cubes en tout
> - qu'il y a des cubes rouges et bleus
> - qu'il y a 5 cubes rouges
> - que les autres cubes sont bleus. »

Chaque ligne isole une donnée, les tirets les constituent en liste. On peut ensuite passer de cette écriture à une écriture schématique, mêlant écriture discursive et représentations graphiques (figure 8) :

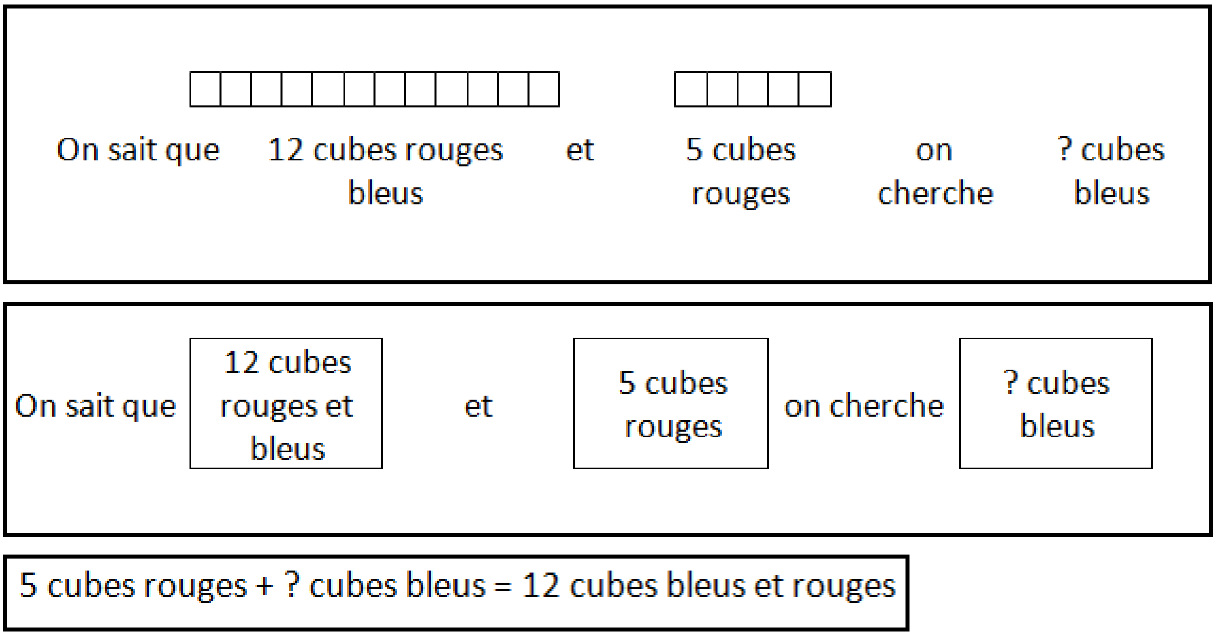


Figure 8. Trois écritures schématiques des données du problème[8].

Nur et Floriane se sont engagées dans cette voie, ce qui montre qu'un tel travail est à la portée d'élèves de cet âge, puisque certains le produisent sans injonction spécifique.

Un tel travail doit être effectué systématiquement par tous les élèves, collectivement et individuellement à chaque occasion fournie par une situation de résolution de problème. Il convient par ailleurs d'avoir au préalable veillé à ce que tous soient capables de reformuler à l'oral, de mémoire, l'énoncé du problème. C'est à cette condition qu'ils pourront commencer à prendre conscience que si l'oral permet parfaitement de mémoriser les informations fournies par l'énoncé, c'est l'écrit qui leur confère le statut de données : le « j'ai..., j'ai… » de l'oral s'efface et avec lui sa malencontreuse polysémie (*posséder* et *savoir*).

6.2. L'écrit comme moyen de réduction de la complexité

L'écrit est un moyen de retenir dans ce qu'on voit d'un objet du monde seulement ce qui est pertinent pour la résolution du problème. Dans un schéma, l'objet du monde n'a pas à être reproduit fidèlement. Seuls doivent être représentés les traits pertinents (sur ce point, voir le travail fondateur de Peres (1984) dont s'inspirent Schubauer-Leoni, Leutenegger et Forget, 2007).

Dans ce problème (à la différence de ce qui pourrait se passer s'il s'agissait de géométrie), il n'importe aucunement que la collection d'objets considérés soit constituée de cubes, car on ne s'intéresse qu'aux quantités en jeu. Le maître le manifeste d'ailleurs oralement en parlant

[8] Les écritures schématiques qui restituent l'énoncé dans sa totalité (et notamment l'inclusion de la partie dans le tout) seront traités dans la partie 6.7.

souvent de carrés à la place de cubes. Il ne va pas de soi pour un élève que le mot « cube » ici doit être compris avec le sens « élément d'une collection » et que de ce fait il peut représenter la collection des douze objets présents dans la boîte aussi bien par des traits verticaux (comme Mickaël), des « ronds », des carrés ou des triangles. De la même manière que la couleur des dits cubes est indifférente, l'opposition de couleur n'étant là que pour faire comprendre que la collection se divise en deux sous-ensembles distincts qui peuvent être représentés de différente manière (un ensemble de ronds « pleins » opposé à un ensemble de ronds « vides » par exemple). De la même manière dans le problème de l'autobus, il est peu important que ce que l'on compte soit des enfants ; on pourrait aussi bien compter les sièges occupés et les sièges libérés. Il s'agirait du même problème.

Il s'agit d'opérations fondamentales mais que des élèves de C.P. sont capables de faire malgré leur complexité (un schéma comme celui de Seyla le prouve par ses imperfections même, puisqu'elle représente des cubes sur une ligne à l'aide de carrés et sur une autre ligne à l'aide de triangles). Seul le passage à l'écrit permet de les rendre manifestes et de les expliciter.

6.3. Ce qu'apporte la substitution de collections graphiques aux collections matérielles

La manipulation de collections matérielles, surtout quand elles comprennent beaucoup d'objets, est toujours moins sûre qu'un travail sur une collection graphique.

6.3.1. Pour effectuer des dénombrements

Dénombrer une collection d'objets matériels est soumis à beaucoup d'aléas, surtout quand elle est effectuée en groupe par des élèves qui peuvent se gêner mutuellement, comme c'est le cas dans la première séance, en particulier dans le groupe des « faibles ». On peut compter deux fois un même objet, en oublier un, c'est le problème de l'énumération (Briand, 1999). Il faut des procédures coûteuses en temps pour les éviter : séparer systématiquement ce qui a été déjà compté de ce qui reste à compter, aligner les objets pour pouvoir les pointer successivement, etc.

À condition d'avoir appris à disposer les symboles en lignes (de cinq, de dix…) on peut, à l'écrit, les dénombrer de manière plus aisée, la disposition en ligne guidant alors l'opération. On peut en outre accompagner l'énumération de marques graphiques (dessiner un petit point sous chaque symbole compté, ou un petit trait…).

6.3.2. *Pour effectuer des opérations sur des collections supérieures à dix*

Tous les élèves de C.P. savent déjà qu'il est plus sûr de travailler sur la collection intermédiaire que constituent les doigts de la main que sur des collections d'objets qui ne sont pas toujours de manipulation aisée ; des éléments de la collection peuvent se perdre, n'être pas dans la bonne position, se déchirer, etc. Le maître le rappelle d'ailleurs :

> « M : ce que tu aurais pu faire aussi Erine / hein tout simple / t'aurais pu faire sans les cubes / tu te serais dit cinq et après t'aurais / au lieu de prendre des cubes t'aurais pris tes doigts » (groupe des « forts »).

On matérialise facilement les opérations de surcomptage en dépliant les doigts les uns après les autres, et les opérations de décomptage en les repliant ostensiblement. Les élèves associent d'ailleurs souvent le surcomptage et le décomptage à ces gestes corporels sans lesquels ils ne savent plus effectuer ces opérations.

Mais cette collection intermédiaire trouve vite ses limites quand certains des nombres qui sont en jeu sont supérieurs à dix. Une collection graphique permet alors de s'affranchir de pratiquement toutes les difficultés que comportent les collections précédentes. Il est nécessaire d'expliciter cet avantage aux élèves et de les habituer à y recourir systématiquement dès que cela est nécessaire, avant de pouvoir s'en passer grâce à l'intériorisation de ces opérations appuyée sur des résultats mémorisés.

6.4. *L'écrit comme moyen de preuve*

Le maître demande à juste titre aux élèves de vérifier qu'ils travaillent sur les bonnes données, qu'ils utilisent une procédure adéquate et qu'ils proposent un résultat qui est juste. Mais malencontreusement il n'attend d'eux que d'être capables de verbaliser oralement ce qu'ils ont fait. Même les élèves qui ont résolu correctement le problème se montrent alors incapables de produire un discours efficace.

À aucun moment, devant leurs difficultés à produire les justifications attendues, le maître ne revient au schéma, pour leur apprendre que grâce à lui on peut procéder aux vérifications nécessaires : les données sont bien celles de l'énoncé, le problème est correctement posé, la procédure utilisée est pertinente et le résultat est juste, et que si le schéma permet de procéder à ces validations, c'est parce qu'il fournit des représentations permanentes.

6.5. *L'écrit comme moyen de s'affranchir des contraintes de la temporalité discursive*

À l'oral, en manipulant des objets pour résoudre un problème qui oblige à mettre en relation deux parties et un tout, qu'on le résolve en procédant de manière additive (en surcomptant pour obtenir le tout à partir du cardinal connu d'une partie) ou de manière soustractive (en décomptant du tout la partie dont le cardinal est connu) on est presque inévitablement entrainé, quand on est un élève de C.P. dont les compétences langagières sont encore essentiellement de type narratif, à raconter des actions successives, sur un mode conversationnel ; de telles verbalisations ne permettent pas d'expliciter ce qui est en jeu au plan mathématique et elles peuvent conduire les acteurs de l'échange à modifier à leur insu la nature du problème, ainsi que nous l'avons vu : on passe dans les trois groupes d'un problème de relation parties-tout - une boîte de 12 cubes contient deux ensembles disjoints dont une partie est faite de 5 cubes rouges, l'autre de cubes bleus - à un problème de transformation d'état (on modifie le contenu d'une boîte).

Le propre d'une représentation schématique est, on l'a déjà dit, de pouvoir, si besoin en est, s'affranchir de toute organisation temporelle et de permettre à la pensée de s'abstraire du flux des actions. Les différents paramètres du problème peuvent dès lors être pensés et verbalisés les uns par rapport aux autres et non pas les uns après les autres. À l'oral, sans l'aide de l'écrit, on donne des informations reliées par des connecteurs du type *et après, et ensuite, et alors*. En s'appuyant sur un schéma, que l'on rende compte oralement de sa production ou de son interprétation, on peut commencer à dire :« Les cubes rouges sont une partie des 12 cubes. Les cubes bleus et les cubes rouges forment un total de 12 cubes. » ou plus simplement : « J'ai dessiné 12 cubes en tout . Les 5 premiers cubes que j'ai dessinés, c'est les cubes rouges. Ils font partie des 12. ».

Des verbalisations de ce type apparaissent dans le corpus, mais elles sont beaucoup fugitives et ne sont pas particulièrement valorisées :

> « Mégane : il a compté les carrés rouges dedans
> M : t'as des rouges et des bleus / au total ça fait douze ». (groupe des « forts »)

Ces apprentissages cognitifs et verbaux ne peuvent bien évidemment être construits que dans une très longue durée, s'étendant sur plusieurs cycles scolaires. Mais au C.P. on peut commencer à apprendre que ce n'est pas du tout la même chose que de dire :

- « Alors il y a des cubes bleus, et puis il y a cinq cubes rouges »
- « Il y a à la fois des cubes rouges et des cubes bleus »
- « Il y a 12 cubes qui sont rouges ou bleus »
- « Il y a 12 cubes dont 5 sont rouges », etc.

De tels reformulations que le schéma permet d'engendrer plus aisément auraient permis aux élèves de se représenter clairement que le contenu de la boîte du problème est constitué de deux parties disjointes dont le cardinal de l'une est connu, ce qui n'est pas le cas pour la très grande majorité d'entre eux.

6.6. Importance de la légende d'un schéma

Un schéma, précisément parce qu'il ne représente pas fidèlement les objets du monde, et parce qu'à l'inverse il constitue des ensembles ou des classes d'objets et représente des relations entre ces ensembles et ces classes à l'aide de codages conventionnels, présente une part d'ambiguïté pour qui veut l'interpréter sans l'aide de légendes.

Or le maître, quand il fait travailler les élèves sur l'un d'entre eux fait toujours comme si ce qui est représenté n'était susceptible que d'une seule lecture. Il ne montre pas qu'un schéma ne devient univoque que s'il est correctement légendé et qu'il faut par exemple écrire en toutes lettres à quoi correspond un ensemble représenté (les collections de 5 symboles figurent les carrés rouges, etc.) et fournir la signification des symboles utilisés (les triangles dessinés correspondant aux cubes de l'énoncé)…

Il aurait été possible d'apprendre à compléter ainsi le schéma de Léa ou celui de Seyla.

6.7. Schémas, schématisations et classes de problème

L'expert quand il entreprend de schématiser un problème, a déjà rencontré des schémas correspondant à la même classe de problème, même s'il ne s'en rend pas compte, il a à sa disposition un ou plusieurs schémas existants. Il ne les invente pas *ex nihilo* au fur et à mesure de ses besoins. Grâce à de longs apprentissages antérieurs, il peut rechercher dans un répertoire fini de schématisations celle qui lui semble en adéquation avec le problème traité.

Il importe d'organiser méthodiquement la constitution d'un tel répertoire (schématisation d'une transformation d'état, d'une transformation d'un ensemble complexe, etc.). Faute de quoi, on la laisse au seul hasard des usages successifs de schémas variés.

Si l'on considère les problèmes parties/tout, il est alors indispensable de mettre à la disposition des élèves les deux schémas suivants (figure 9) et de leur apprendre à les utiliser.

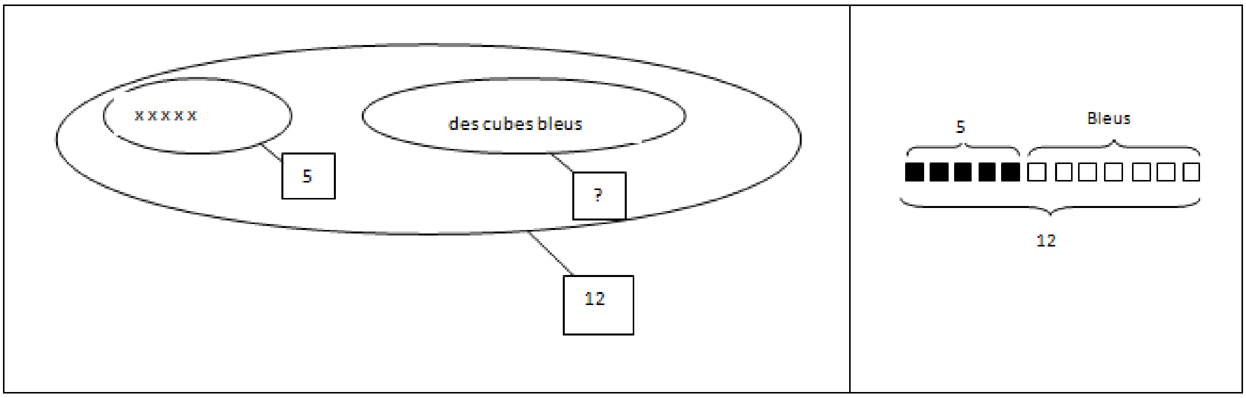


Figure 9 : des schémas possible qui représentent le problème des cubes.

Par ailleurs, il est nécessaire de comprendre la différence entre les problèmes du champ additif, notamment entre les problèmes de type parties/tout et les problèmes de type transformation d'état, ce qui est très difficile à l'oral où l'on utilise inévitablement une succession qui provoque une confusion entre les deux.

Nous rejoignons ici Julo (2001), qui propose d'introduire des schématisation dans l'enseignement de la résolution de problème, en s'appuyant notamment sur Vergnaud (1997). En effet, la production d'un schéma demande de s'appuyer sur une catégorisation des problèmes. Il s'agirait dans ce cas d'un véritable enseignement, reposant, sur les deux schémas de base (figure 10).

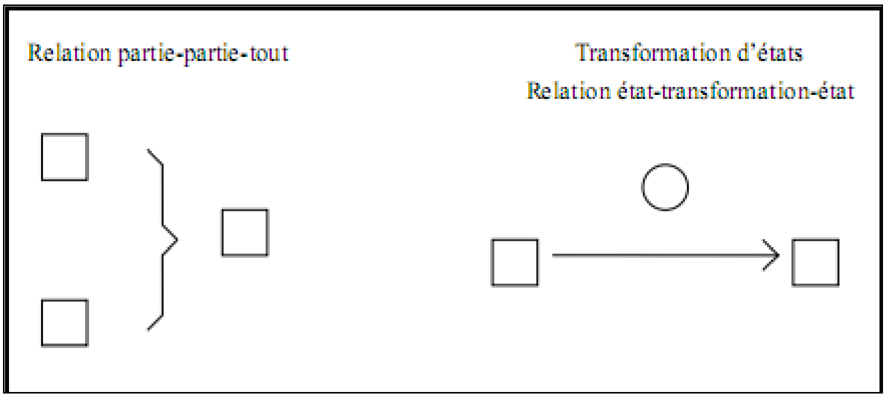


Figure 10. D'après Vergnaud, 1997.

Adopter ainsi *une* représentation possible, avec ses codes minimaux, si elle était le fait non d'un enseignant mais de la profession pourrait peut-être donner aux élèves un code stable de représentation des problèmes. Dans la séance que nous avons analysée dans cet article, ce code aurait permis notamment de distinguer le problème des cubes, qui relève du premier schéma, de celui du bus, qui correspond au second.

7. Conclusion

Deux raisons majeures expliquent donc qu'il soit aussi difficile de didactiser le schéma :

7.1. *Le schéma est une écriture et non une image*

Tout ce qui dans l'écrit n'est pas susceptible de pouvoir être transformé en discours oral est minoré voire négligé ainsi que l'a montré Jack Goody. Le métalangage pour le décrire est instable.

Les spécificités du schéma sont de ce point de vue encore plus malaisées à décrire que celles qui concernent les listes ou les tableaux, qui eux procèdent à une organisation graphique de ce qui est encore un matériau linguistique, même s'il ne relève plus du discours (nombre, mot, syntagme). Ce n'est pas le cas du schéma dont on pourrait dire qu'il est une forme limite d'écrit, puisque si tout ce qui relève du langage en est absent (hormis les légendes), tout ce qui relève de l'exploitation de l'espace graphique y est présent. Il est un objet de la littéracie.

Il est d'ailleurs à remarquer que ceux qui se sont attachés à décrire la « raison graphique » n'en parlent presque jamais, alors qu'ils se réfèrent constamment aux listes et aux tableaux, comme s'ils ne pouvaient penser la raison graphique qu'en termes langagiers (Olson, 1998). Les didacticiens qui sont porter leurs travaux sur ces problèmes reproduisent le même phénomène et s'attachent principalement à la scolarisation des tableaux et des listes (Lahanier-Reuter, 2006).

Dès lors, les seuls schémas qui sont l'objet de réflexions disciplinaires et didactique sont ceux qui sont considérés comme des savoirs (voir Bertin, 1997 et par exemple Journot, 1997).

7.2. *Rôle du schéma dans la construction des savoirs*

Il est tout aussi problématique de cerner la place qu'occupe un schéma dans les différents processus cognitifs (élaboration d'une représentation mentale, stratégie de conceptualisation, modélisation, résolution de problème). Elle n'est évoquée qu'incidemment dans les travaux qui portent sur ces phénomènes (Barth, 1987 ; Revue Aster numéro spécial, *Modèles et modélisation*, 1987).

Le schéma est souvent utilisé par l'expérimentateur pour créer une situation permettant d'observer la manière dont l'un ou l'autre de ces processus est mis en jeu par un apprenti. On peut par exemple faire passer à des élèves de C.P. des épreuves d'inclusion (Houdé, 1992). On peut voir dans un schéma défectueux le signe d'une représentation mentale erronée

(Giordan et De Vecchi, 1987). Tous les observateurs, enfin, s'accordent à reconnaitre que les schémas ne sont d'aucune utilité pour les élèves sans que l'on sache véritablement pourquoi.

Si des élèves de collège peuvent produire des schémas où l'appareil digestif apparaît comme un circuit fermé, est-ce parce qu'ils en ont une représentation fausse, en contradiction avec leur expérience sensible, ou n'est-ce pas plutôt parce qu'on ne leur a pas appris comment schématiser correctement un circuit ouvert et un circuit fermé ? On retrouve ici la question que nous posions plus tôt devant l'écriture 12 + 5 = 7.

La nécessité d'enseigner l'écriture algébrique ne se discute pas, ne devrait pas davantage se discuter la nécessité d'enseigner méthodiquement chacune des schématisations dont on use nécessairement pour construire des savoirs, et cela particulièrement lors du cycle 2, dit « des apprentissages fondamentaux ».

Notre analyse permet donc d'affirmer :

1. Que le schéma doit être considéré comme un écrit nécessitant, comme tous les écrits, un apprentissage spécifique.
2. Qu'il est particulièrement approprié pour rendre les élèves sensibles aux ressources cognitives que procurent l'écrit, ressources qui sont paradoxalement plus difficiles à percevoir quand on les fait travailler en réception ou en production sur des textes écrits, leur attention étant alors focalisée sur des problèmes de mise en mots du savoir.

Le schéma manifeste ce qui est l'essence même de la raison graphique, paradoxalement parce qu'il n'est pas langagier.

Références

Aster, 1987, *Numéro spécial Modèles et modélisation.*

Balacheff, N., & Margolinas, C. (2005). cKc Modèle de connaissances pour le calcul des situations didactiques. In A. Mercier & C. Margolinas (Eds.), *Balises pour la Didactique des Mathématiques* (pp. 75-106). Grenoble: La pensée sauvage.

Barth, B.-M. (1987). *L'apprentissage de l'abstraction*. Paris: Retz.

Bautier, T., Gueudet, G., Hili, H., Kermorvant, E., Le Méhauté, T., Le Poche, G., et al. (2004). *Résolution de problèmes en CM2: variation autour d'une séquence d'ERMEL.* Actes de 30ème colloque Inter-IREM des formateurs et professeurs chargés de la formation des maîtres

Bertin, J. (1977). *Le graphique et le traitement graphique de l'information*. Paris: Flammarion.

Bessot, A., & Richard, F. (1980). Une étude sur le fonctionnement du schéma arbre par la commande de variable d'une situation. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 1*(3), 387-422.

Briand, J. (1999). Contribution à la réorganisation des savoirs prénumériques et numériques. Étude et réalisation d'une situation d'enseignement de l'énumération dans le domaine prénumérique. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 19*(1), 41-76.

Brousseau, G. (1998). *Théorie des situations didactiques*. Grenoble La Pensée Sauvage.

Chevallard, Y., & Bosch, M. (1999). La sensibilité de l'activité mathématique aux ostensifs. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 19*(1), 177-124.

Delaborde, M. (2009). *Formes et sens de l'univers graphique en maternelle.* Thèse de doctorat. Université Paul Verlaine, Metz.

Duval, R. (1995). *Semiosis et pensée humaine. Registres et apprentissages intellectuels.* . Berne: Peter Lang.

Giordan, A., & De Vecchi, G. (1987). *Les origines du savoir*. Neuchâtel: Delachaux.

Goody, J. (1977/1979). *La raison graphique* (J. Bazin & A. Bensa, Trad.). Paris: Les éditions de minuit.

Heems, P. (2004). Et le petit rond rouge rencontra le grand rond noir au milieu des ronds verts. *Recherches, Traces, 41*, 7-15.

Houdé, O. (1992). *Catégorisation et développement cognitif*. Paris: P.U.F.

Jacobi, D. (1987). *Textes et images de la vulgarisation scientifique*. Bern: Peter Lang.

Journot, M. (1997). L'utilisation de modèles d'analyse spatiale et la construction par les élèves de modèles graphiques. Contraintes et possibilités de l'expression géographique. In F. Audigier (Ed.), *Actes du colloque "Concepts, modèles, raisonnements"* (pp. 212-219). Paris: INRP.

Julo, J. (1995). *Représentation des problèmes et réussite en mathématiques*. Rennes: Presses universitaires de Rennes.

Julo, J. (2001). Des apprentissages spécifiques pour la résolution de problèmes. *Grand N, 69*, 31-52.

Lahanier-Reuter, D. (2006). Listes et tableaux : une mise en perspective. *Pratiques, 131-132*, 174-186.

Laparra, M. (2006). La grande section de maternelle et la "raison graphique". *Pratiques, 131-132*, 237-249.

Laparra, M., & Margolinas, C. (2008). Les premiers apprentissages de l'écrit : doxa et malentendus des écrits authentiques. *Actes du colloque : Les didactiques et leur rapport à l'enseignement et à la formation*, Bordeaux. http://www.aquitaine.iufm.fr/infos/colloque2008/cdromcolloque/communications/lapa.pdf

Margolinas, C. (2003). Un point de vue didactique sur la place du langagier dans les pratiques d'enseignement. *Actes du colloque « Construction des connaissances et langage dans les disciplines d'enseignement »*, Bordeaux

Margolinas, C., & Laparra, M. (2008). Quand la dévolution prend le pas sur l'institutionnalisation. *Actes du colloque : Les didactiques et leur rapport à l'enseignement et à la formation*, Bordeaux. http://www.aquitaine.iufm.fr/infos/colloque2008/cdromcolloque/communications/marg.pdf

Margolinas, C., & Laparra, M. (2009). Savoirs invisibles et connaissances cruciales : le cas des mathématiques en maternelle. In C. Passerieux (Ed.), *La maternelle. Première école, premiers apprentissages* (pp. 99-107). Lyon: Chronique sociale.

Monnier, N. (2003). Les schémas dans les activités de résolution de problèmes. *Grand N, 71*, 25-47.

Nonnon, E. (2004). Travail visible et invisible : la trace écrite au tableau. *Recherches, Traces 41*, 17-30.

Olson, D. R. (1998). *L'univers de l'écrit*. Paris: Retz.

Passeron, J.-C., & Revel, J. (Eds.). (2005). *Penser par cas*. Paris: Editions de l'école des hautes études en sciences sociales.

Peres, J. (1984). *Utilisation d'une théorie des situations en vue de l'identification des phénomènes didactiques au cours d'une activité d'apprentissage scolaire. Construction d'un code de désignation à l'école maternelle.* Bordeaux : IREM, Université de Bordeaux I.

Pfaff, N. (2003). Différencier par les procédures: un exemple pour la proportioninalité au cycle 3. *Grand N*, *71*, 49-59.

Salin, M.-H. (1999). Pratiques ostensives des enseignants et contraintes de la relation didactique. In G. Lemoyne & F. Conne (Eds.), *Le cognitif en didactique des mathématiques* (pp. 327-352). Montréal Les Presses de l'Université de Montréal.

Schubauer-Leoni, M.-L., Leutenegger, F., & Forget, A. (2007). L'accès aux pratiques de fabrication de traces scripturales convenues au commencement de la forme scolaire : Interrogations théoriques et épistémologiques. *Education et didactique, 1*(2), 7-34.

Vergnaud, G. (1990a). Développement et fonctionnement cognitifs dans le champ conceptuel des structures additives. In S. Netchine-Grynberg (Ed.), *Développement et fonctionnement cognitifs* (pp. 261-277). Paris: P.U.F.

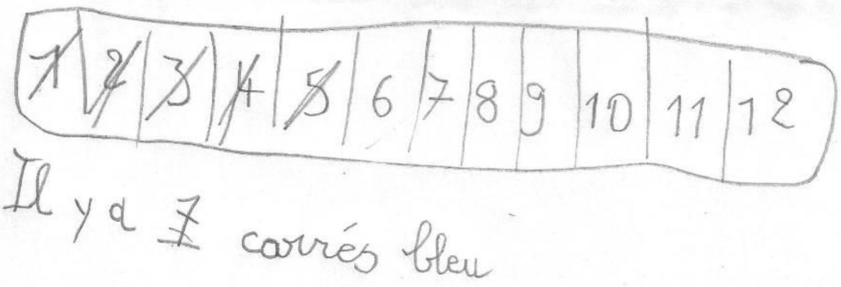
Vergnaud, G. (1990b). La théorie des champs conceptuels. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 10*(2.3), 133-170.

ANNEXE 1
LES SCHÉMAS ETUDIÉS

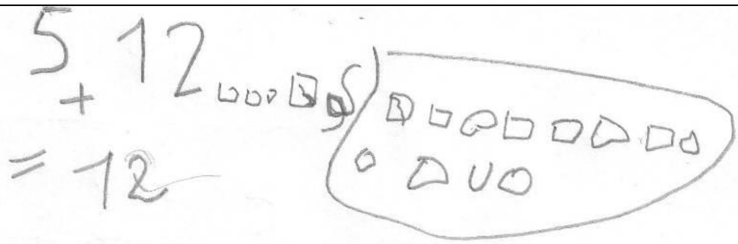
Les schémas ci-dessous ont été produits par des élèves de C.P. au sujet du problème suivant :

> « Une boîte contient 12 cubes.
> On peut avoir des cubes bleus ou rouges.
> Il y a 5 cubes rouges. Combien y-a-t-il de cubes bleus ? »

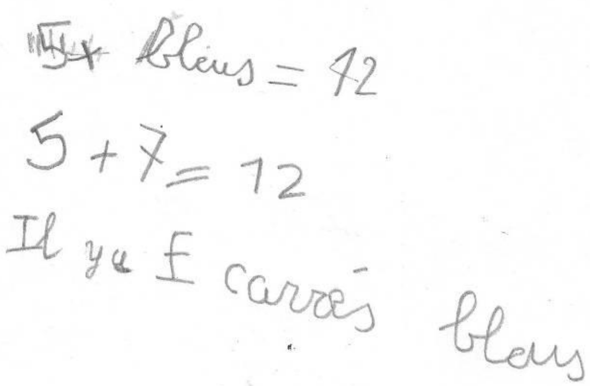
Les conditions d'observation n'ayant permis de prendre que des photos dont la qualité ne permet pas la reprographie, nous avons reconstitué à l'identique les productions des élèves.



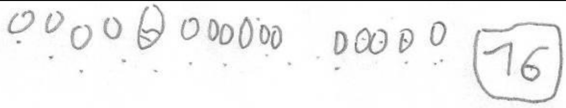
Audrey



Damien

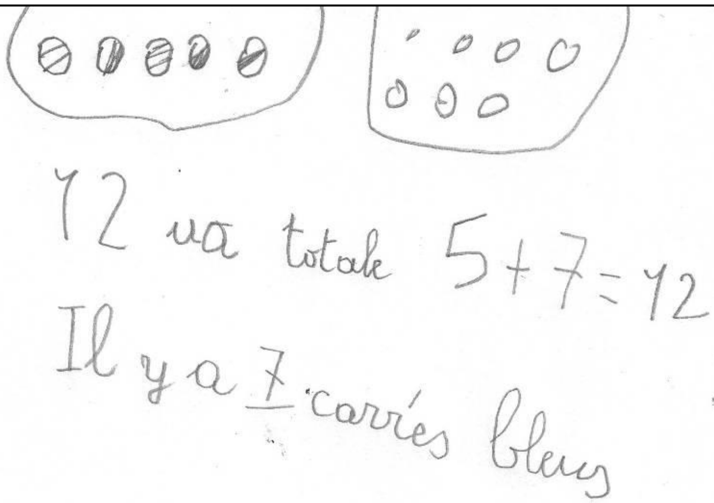


Floriane

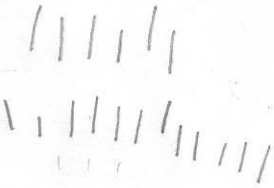


Julie

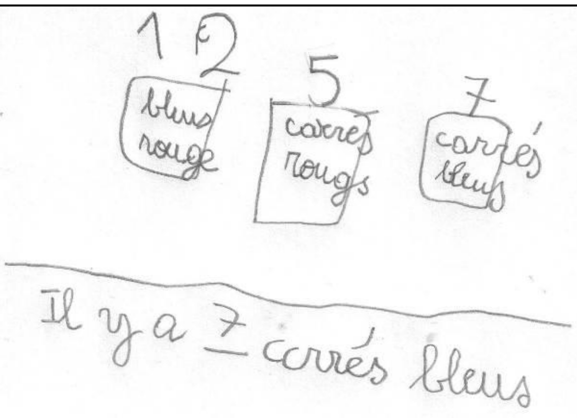
Hamdi



Léa



Mickaël



Nur

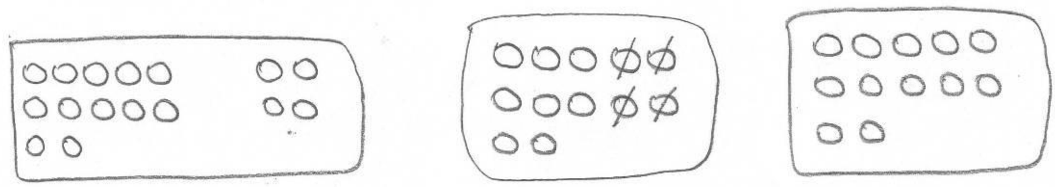
Seyla

ANNEXE 2

LE DEUXIÈME PROBLÈME ETUDIÉ

Reconstitution du tableau présenté aux élèves concernant le deuxième problème étudié (l'énoncé et les schémas ont été fait par le maître à l'avance au tableau, ils sont montrés aux élèves dans la deuxième partie de la séance dans les groupes des « faibles » et des « moyens »).

Dans le bus qui arrive, il y a 12 enfants.
À l'arrêt, 4 enfants descendent et personne ne monte. Combien y-a-t-il d'enfants dans le bus lorsqu'il repart ?



Quand le bus repart, il y a __ enfants dans le bus